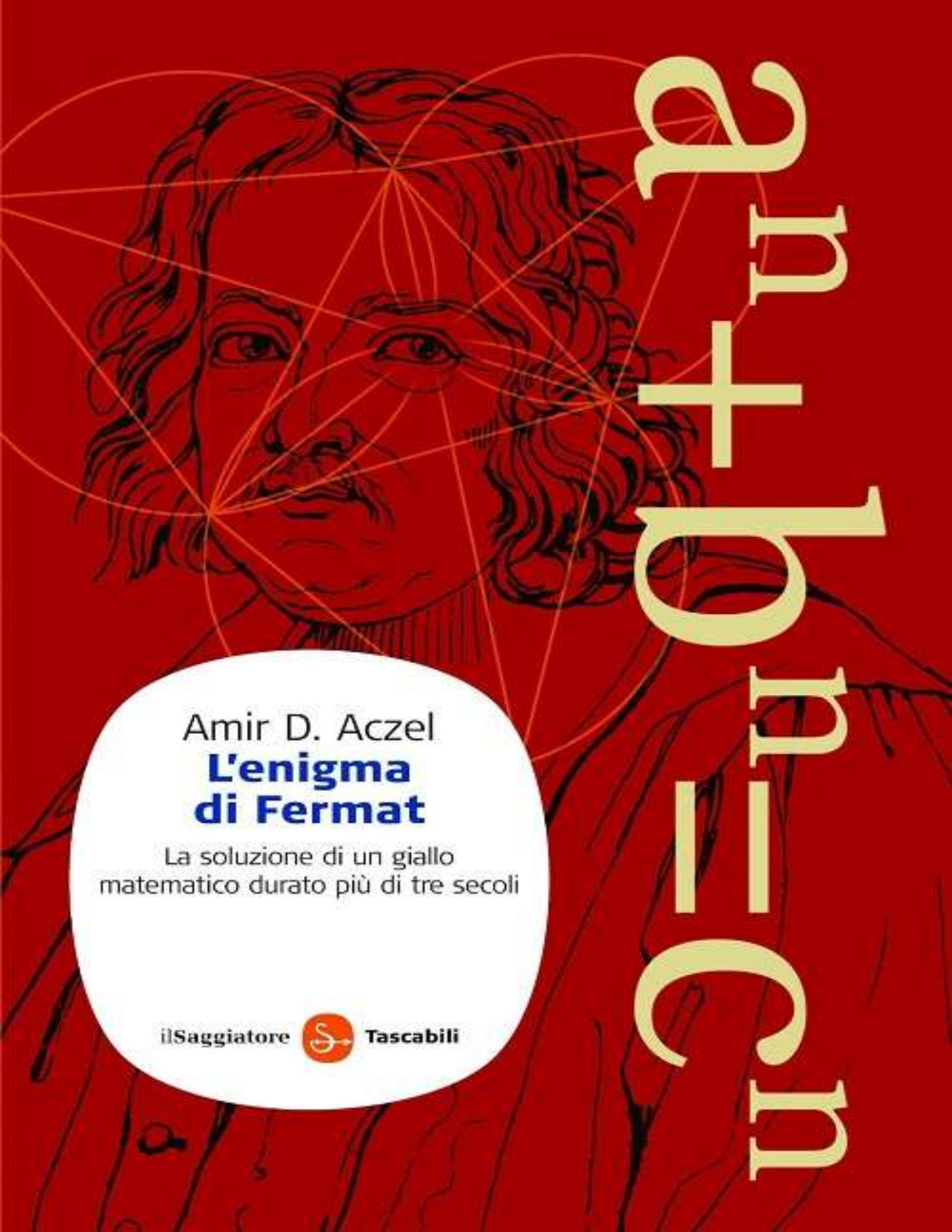



$$a^n + b^n = c^n$$

Amir D. Aczel
**L'enigma
di Fermat**

La soluzione di un giallo
matematico durato più di tre secoli

ilSaggiatore



Tascabili

CÂU CHUYỆN HẤP DẪN
VỀ BÀI TOÁN FERMAT Amir D. Aczel

Nguyên tác : **FERMAT'S LAST THEOREM**

**Unlocking the Secret
of an Ancient Mathematical Problem**

Nxb : Four Walls Eight Windows

New York/London

Người dịch : **Trần văn Nhung**

Đỗ trung Hậu

Nguyễn kim Chi

Nxb Giáo dục 2001

Chia sẻ ebook : <http://downloadsach.com/>

Follow us on Facebook : <https://www.facebook.com/caphebuoitoi>

Mục lục

Lời giới thiệu.

Lời người dịch.

Lời giới thiệu của Nhà xuất bản.

Lời nói đầu của tác giả.

Cambridge, Anh, tháng 6/1993.

Pierre de Fermat.

Các số nguyên tố.

Một dòng ghi chú nổi tiếng trên lề sách.

Tháng 7,8 /1993 - Phát hiện một kẻ hớ quan trọng.

Khoảng giữa sông Tigris và sông Euphrates, Circa,

2000 năm trước Công Nguyên.

Sự giàu có là một đại lượng bình phương.

"Plimpton 322".

Hội Số học cổ đại - Những người sùng bái đã

thề giữ bí mật.

"Con số là tất cả".

Bình phương cạnh huyền bằng tổng

bình phương hai cạnh kia.

Các số nguyên, các phân số và gì nữa ?

Di sản của Pythagoras.

Dây thừng, sông Nile và sự ra đời của môn hình học.

Định lý là gì ?

"Eureka ! Eureka !"

Alexandria - phần Ai Cập thuộc HyLạp, khoảng năm 250.

Truyện "Một nghìn một đêm lẻ".

Một thương gia thời Trung Cổ và "Tỷ số vàng".

Các nhà "Cosa" học.

Công cuộc tìm kiếm tri thức cổ trong thời kỳ Phục Hưng.
Bình phương, lập phương và các lũy thừa bậc cao hơn.
Người nghiên cứu thuật toán.
Bảy cây cầu của thành phố Königsberg.
Gauss - Thiên tài vĩ đại người Đức.
Số ảo.
Sophie Germain.
Sao chổi rực sáng năm 1811.
Một người học trò.
Những nhà toán học của Napoleon.
Hàm số tuần hoàn.
Chứng minh của Lamé.
Những con số lý tưởng.
Một giải thưởng khác.
Hình học phi Euclid.
Thành công và bi kịch.
Một nạn nhân khác.
Các ideal Dedekind.
Kết thúc thế kỷ.
Các dạng modula.
Một sự liên quan bất ngờ với cái bánh vùng vòng.
Chứng minh của Faltings.
Vị tướng Hy Lạp huyền bí mang cái tên khôi hài.
Các đường cong elliptic.
Một giả thuyết kỳ lạ sắp được đưa ra.
Tôkyô, Nhật Bản, đầu thập niên 1950.
Một sự khởi đầu đầy hứa hẹn.
"Anh đang nói gì...?"
Giả thuyết của Shimura.
Muru đồ và sự phản bội.
"Một bài tập dành cho bạn đọc quan tâm".
Sự đối trá.
Sâu trong rừng Đen, mùa thu 1984.
Định lý của Ribet.
Ước mơ của một cậu bé.
Ngọn lửa cũ lại bùng cháy.
Chia một bài toán lớn thành các bài toán nhỏ hơn.
Bài báo của Flach.
Một người bạn tốt.
Khâu cuối cùng của bài toán.
Công việc tiếp theo.
Một kẻ hờ lớn được phát hiện.
Nỗi đau khổ.
Việc diễn ra sau đó.
Có đúng là Fermat đã chứng minh được.

Chú giải.
Lời tác giả.

LỜI GIỚI THIỆU

Độc giả đang có trong tay một cuốn sách đặc biệt: đây vừa là một cuốn sách về Toán, lại vừa là một cuốn tiểu thuyết mà nhân vật chính của nó là *Bài toán Phécma*. Ai cũng biết, Bài toán Phécma là một trong những bài toán khó và nổi tiếng nhất của toán học, là "nhân vật chính" của Toán học trong suốt hơn ba thế kỷ. Tác giả đã thông qua cuộc đời của nhân vật chính đó để mô tả cho độc giả một bức tranh toàn cảnh về lịch sử phát triển của nhiều ngành toán học trong ba thế kỷ qua. Sự lựa chọn của tác giả thật là hợp lý, bởi lẽ Bài toán Phécma là "con gà đẻ trứng vàng của Toán học hiện đại". Những cố gắng của các nhà toán học nhằm giải Bài toán Phécma đã làm nảy sinh nhiều lý thuyết mới. Những lý thuyết này sẽ còn mãi với toán học, cả khi Bài toán Phécma đã được giải xong. Chứng minh "Định lý cuối cùng của Phécma" mà Andrew Wiles trình bày là một chứng minh rất khó, vận dụng hầu hết những kiến thức của nhiều ngành toán học hiện đại. Nói như Ken Ribet, chỉ có khoảng một phần nghìn nhà toán học có thể hiểu chứng minh đó. Vậy mà cuốn sách này được viết cho một đối tượng rất rộng rãi: cho bất kỳ ai yêu thích toán học! Công việc khó khăn đó được hoàn thành một cách tài tình: tác giả đã làm cho người đọc hiểu được con đường dẫn đến chứng minh của A. Wiles, thậm chí hiểu được tư tưởng chính của chứng minh. Đây là cuốn "tiểu thuyết lịch sử" (toán học) mà bạn có thể đọc đi đọc lại nhiều lần. Mỗi khi trình độ toán học của bạn nâng cao hơn một bước, bạn lại hiểu sâu hơn một điều nào đó trong sách. Và điều quan trọng hơn nữa là cuốn sách này sẽ làm bạn thêm yêu toán học, một ngành khoa học không những cần thiết cho cuộc sống, mà còn chứa đầy chất thơ, đầy những cuộc phiêu lưu, và thậm chí cả âm mưu nữa!

Mong rằng sẽ có nhiều hơn nữa những cuốn sách như thế này, những cuốn sách góp phần lôi cuốn các bạn trẻ đi vào khoa học. Vì thế, chúng ta hết sức trân trọng sự giúp đỡ của Liên minh doanh nghiệp Mỹ vì nền giáo dục Việt Nam, Nhà xuất bản "Bốn bức tường Tám cửa sổ" đã tạo điều kiện để các bạn trẻ Việt Nam có được cuốn sách này, và những cuốn khác trong tương lai. Cần nói thêm rằng, việc dịch một cuốn sách "vừa toán, vừa tiểu thuyết" như thế này là một việc làm rất khó khăn. Nó đòi hỏi người dịch cũng phải "vừa là nhà văn, vừa là nhà toán học". Bản dịch của Giáo sư Trần Văn Nhung và các cộng sự có thể xem là khá thành công.

Xin trân trọng giới thiệu cuốn sách cùng bạn đọc.

GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

LỜI NGƯỜI DỊCH

Trong lịch sử toán học không thể có bài toán nào khác so sánh được với Bài toán Phécma (Fermat). Nó được phát biểu một cách đơn giản đến mức ngay cả một học sinh trung học cơ sở cũng có thể hiểu được, nhưng việc tìm lời giải đã thách thức trí tuệ nhân loại biết bao nhiêu thế hệ suốt hơn ba thế kỷ rưỡi vừa qua và người hoàn tất chặng đường cuối cùng vào năm 1993 là GS.TS. Andrew Wiles. Ông sinh tại Cambridge (Anh), nhận bằng tiến sĩ tại Trường Đại học Tổng hợp Cambridge và sau đó sang giảng dạy và nghiên cứu toán học tại Trường Đại học Tổng hợp Princeton (Hoa Kỳ). Cũng chính tại đây, sau 8 năm lao động liên tục, bền bỉ và khốc liệt ông đã giải quyết xong Bài toán Phécma.

Ở Việt Nam chúng ta cũng có nhiều người (làm toán hoặc không làm toán), nói riêng là các em học sinh và các thầy cô giáo phổ thông hay các bạn sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng, rất thích thú tìm hiểu, theo dõi quá trình giải quyết siêu bài toán này và trên thực tế cũng đã có một số ít người thử giải nó!

Theo chúng tôi được biết thì ở nước ta, một số nhà toán học có uy tín làm việc trong các lĩnh vực gần gũi với Bài toán Phécma, như hình học đại số, giải tích Đôphăng.... đã nắm được lược đồ và phương pháp chứng minh của Andrew Wiles.

Chúng tôi bày tỏ sự cảm ơn tới bà Barbara Stewart, Chủ tịch Liên minh doanh nghiệp Mỹ vì nền giáo dục Việt Nam, người đã tặng chúng tôi cuốn sách gốc bằng tiếng Anh và tích cực giúp đỡ trong việc liên hệ với Nhà xuất bản "Bốn bức tường Tám cửa sổ" cho phép dịch cuốn sách sang tiếng Việt và in tại Việt Nam. Đồng thời, chúng tôi cũng xin cảm ơn Nhà xuất

bản Giáo dục, ông Giám đốc Ngô Trần ái, Phó Giám đốc PGS.TS. Vũ Dương Thụy, Phó Giám đốc TS. Nguyễn Đăng Quang, bà Nguyễn Minh Lý (biên tập cho cuốn sách) và TS. Phạm Phú thuộc Nhà xuất bản Giáo dục đã tích cực cộng tác, giúp đỡ để bản dịch cuốn sách được xuất bản tại Việt Nam. Tập thể dịch giả đặc biệt cảm ơn GS. TSKH. Hà Huy Khoái (Viện Toán học, TT KHTN và CNQG) đã đọc, góp ý cho bản thảo và viết lời giới thiệu cho cuốn sách.

Do trình độ chuyên môn toán học và tiếng Anh của những người dịch cuốn sách này còn hạn chế, chúng tôi mong được bạn đọc cảm thông và chỉ giáo cho các sai sót để lần tái bản sau này được hoàn thiện hơn.

Xin cảm ơn độc giả!

TM Tập thể dịch giả

Xuân Canh Thìn GS. TS KH. Trần Văn Nhung

2000 Bộ Giáo dục và Đào tạo

49 Đại Cồ Việt, Hà Nội

ĐT: 04-8692479 Fax: 04-8693243

E-mail: tvnhung@moel.edu.vu

LỜI GIỚI THIỆU CỦA NHÀ XUẤT BẢN

Năm 1993, tại một hội nghị khoa học ở nước Anh, một nhà toán học đến từ thành phố Princeton (Hoa Kỳ) đã làm chấn động dư luận. Ông đã giải quyết được một trong những vấn đề toán học cực kỳ huyền bí, điều mà hàng ngàn nhà toán học đã bó tay trong suốt hơn 350 năm qua : ông đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat (Phécma) trong một bài báo dài 200 trang. Việc chứng minh định lý đã tốn mất của ông 7 năm trời và sau đó phải thêm một năm nữa để ông hoàn thiện chứng minh của mình. Định lý cuối cùng của Fermat là một câu chuyện về con người, về lịch sử và về các nền văn hóa nằm ẩn ở đằng sau thành tựu khoa học vang dội này.

Được viết bởi một học giả Pháp thế kỷ thứ XVII, định lý phát biểu lên nghe có vẻ đơn giản: bình phương của một số số nguyên có thể phân tích thành tổng hai bình phương của hai số nguyên khác - chẳng hạn, năm bình phương (25) bằng bốn bình phương (16) cộng ba bình phương (9) - nhưng điều tương tự không xảy ra đối với lũy thừa bậc ba hay các lũy thừa bậc cao hơn. Sau khi Fermat qua đời, rất nhiều nhà toán học đã dành cả cuộc đời để cố chứng minh định lý này.

Định lý có nguồn gốc từ thời xa xưa. Khoảng 2000 năm trước Công nguyên, người Babylon đã tìm cách phân tích một số chính phương thành tổng của hai số chính phương. Vào thế kỷ VI trước Công nguyên, nhà toán học Hy Lạp Pythagoras đã khái quát điều này thành một định lý nổi tiếng của ông và định lý này đã mở đường cho Fermat.

Mấy thế kỷ sau khi Fermat qua đời, vào năm 1955, với một bước tiến khá xa, hai nhà toán học Nhật Bản đã đưa ra một phỏng đoán tuyệt vời về khả năng có mối liên hệ giữa hai ngành toán học khác hẳn nhau. 40 năm sau đó chính công trình của họ đã giúp cho Andrew Wiles, nhà toán học của thành phố Princeton, chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat.

Cuốn sách này kết hợp triết học với một môn khoa học rất khó, cộng với văn phong kiểu phóng sự mang màu sắc khảo cứu nhằm dựng nên câu chuyện rất thực về trí tuệ nhân loại.

NXB Bốn bức tường Tám cửa sổ

LỜI NÓI ĐẦU CỦA TÁC GIẢ

Tháng 6 năm 1993. Tom Schulte, một người bạn cũ của tôi ở California đã đến Boston thăm tôi. Chúng tôi ngồi trong một quán cà phê tràn đầy ánh nắng trên phố Newbury với các ly đồ uống lạnh ở trước mặt. Tom mới ly dị vợ và anh mang một vẻ mặt trầm ngâm. Anh quay về phía tôi. "Dầu sao", anh nói, "Định lý cuối cùng của Fermat cũng đã được chứng minh". Lại một trò đùa mới, tôi nghĩ trong khi Tom lại nhìn ra vĩa hè.

20 năm trước, Tom và tôi là hai người bạn ở chung một phòng, cả hai chúng tôi cùng là sinh viên toán của Trường Đại học Tổng hợp California tại Berkeley. Định lý cuối cùng của Fermat là đề tài chúng tôi thường bàn luận. Chúng tôi cũng thường tranh luận về hàm số, về tập hợp, về trường số, và cả về tôpô nữa. Ban đêm chẳng sinh viên toán nào đi ngủ sớm vì các bài tập rất khó. Điều này đã làm cho chúng tôi khác biệt với sinh viên trong các lĩnh vực khác. Đôi khi chúng tôi phát điên đầu với toán học... cố chứng minh định lý này hoặc định lý kia để nộp đúng hạn vào sáng ngày hôm sau. Còn Định lý cuối cùng của Fermat thì sao? Chẳng bao giờ chúng tôi tin là chúng tôi sẽ chứng minh được. Một định lý mới khó làm sao và suốt hơn 350 năm biết bao người đã cố gắng chứng minh. Chúng tôi đã phát hiện ra một điều lý thú là kết quả của các nỗ lực nhằm chứng minh định lý này đã làm cho tất cả các bộ môn toán học phát triển. Nhưng mọi cố gắng lần lượt đều thất bại, hết người này đến người khác. Định lý cuối cùng của Fermat đã trở thành biểu tượng cho mục tiêu mà con người không thể nào đạt tới được. Thậm chí có lần tôi đã dùng tính không chứng minh được của định lý này để tạo lợi thế cho mình. Chuyện là vài năm sau, cũng tại Berkely, tôi tiếp tục chương trình thạc sĩ sau khi đã tốt nghiệp đại học. Một gã sinh viên sau đại học ngành toán không biết trình độ toán học của tôi tỏ ý muốn giúp tôi làm toán khi chúng tôi gặp nhau ở Ký túc xá Quốc tế - nơi hai chúng tôi cùng ở. "Tôi làm toán học lý thuyết.", - anh ta nói, "nếu gặp vấn đề toán học nào mà anh không thể giải quyết được, hãy cứ hỏi tôi, đừng ngại." Lúc anh ta chuẩn bị đi tôi nói "Hm, vâng. Có vấn đề mà anh có thể giúp tôi...". Anh ta quay lại hỏi: "Gì vậy? Chắc chắn là tôi sẽ giúp. Hãy cho tôi biết việc gì nào." Tôi vội lấy một tờ giấy ăn và mở ra - lúc đó chúng tôi đang ở trong phòng ăn. Tôi chậm rãi viết lên tờ giấy:

$X^n + Y^n = Z^n$ không có nghiệm nguyên khi n lớn hơn 2.

"Tôi đang cố gắng chứng minh điều này từ tối hôm qua", tôi nói rồi đưa cho anh ta tờ giấy ăn. Mặt anh ta tái đi như cắt không còn giọt máu. "Định lý cuối cùng của Fermat", anh ta lầm bầm. "Đúng vậy" - tôi nói, "anh làm toán học lý thuyết mà. Anh có thể giúp tôi chứ?". Sau lần ấy tôi chẳng bao giờ còn nhìn thấy anh ta đến gần tôi nữa.

"Tôi nói chuyện nghiêm túc đây", Tom nói rồi uống cạn ly của mình. "Andrew Wiles là người vừa tháng trước đã chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat tại Cambridge. Hãy nhớ lấy cái tên ấy. Anh sẽ còn nghe thấy nó nhiều lần". Tối hôm ấy Tom đã bay trở về California. Mấy tháng sau tôi đã rõ là Tom không đùa, và tôi đã dõi theo một chuỗi các sự kiện. Trước tiên là Wiles được ca ngợi. Thế rồi một kẽ hở trong chứng minh của ông đã bị phát hiện. Sau đó Wiles mất thêm một năm trời để rồi cuối cùng đã trình làng một chứng minh hoàn hảo. Nhưng qua tìm hiểu câu chuyện về sự thành công này tôi thấy rằng Tom đã sai ở chỗ là Andrew Wiles không phải là cái tên duy nhất mà tôi cần phải lưu tâm tới. Tôi và cả thế giới cần thấy rõ là chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat không phải là công lao chỉ của một nhà toán học. Wiles đương nhiên là người đáng ca ngợi nhất, nhưng vinh quang còn thuộc về cả Ken Ribet, Barry Mazur, Goro Shimura, Yutaka Taniyama, Gerhard Frey, và nhiều người khác nữa. Cuốn sách này sẽ kể lại toàn bộ câu chuyện, kể cả những điều thực sự xảy ra ở đằng sau sự thành công này, những gì chưa lọt vào tầm ống kính của phương tiện thông tin đại chúng và ánh sáng đèn chiếu. Đây còn là một câu chuyện đề cập đến sự dối trá, mưu đồ và cả sự phản bội nữa.

Amir D.Aczel

"Có lẽ tốt nhất tôi sẽ trình bày kinh nghiệm làm toán của mình giống như việc đi vào một lâu đài tối om. Bạn bước vào phòng thứ nhất và trong đó tối đen như mực. Bạn bước đi loạng choạng, va đập vào đồ đạc trong phòng. Dần dần, bạn cũng biết được vị trí của từng thứ một. Và cuối cùng, sau khoảng sáu tháng bạn lần ra công tắc đèn rồi bật lên. Ngay lập tức mọi thứ được soi tỏ và bạn thấy rõ mình đang ở đâu. Thế rồi bạn bước vào phòng tiếp theo và ở đó lại chỉ là bóng tối..."

Đó là cách mà Giáo sư Andrew Wiles đã miêu tả quá trình 7 năm trời ông miệt mài làm việc để khám phá ra điều huyền bí vĩ đại của toán học.

*
* *

Sáng sớm tinh mơ ngày 23/6/1993, Giáo sư John Conway tới tòa nhà đã xin màu của Khoa Toán Trường Đại học Tổng hợp Princeton. Ông mở cửa lớn rồi bước vội vào phòng làm việc của mình. Suốt mấy tuần nay, trước cuộc đến thăm nước Anh của Andrew Wiles - người bạn đồng nghiệp của ông, liên tiếp những tin tức bán tín bán nghi đang lan truyền trong cộng đồng toán học thế giới. Conway cảm thấy có một điều gì đó quan trọng sẽ xảy ra. Nhưng ông không đoán được đó là điều gì. Ông bật máy vi tính, rồi ngồi xuống nhìn chăm chăm vào màn hình. 5 giờ 53 phút sáng, một bức thư điện tử ngắn gọn từ bờ bên kia Đại Tây Dương chợt hiện lên: "Wiles chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat".

Cambridge, Anh, tháng 6/1993 Cuối tháng 6/1993, Giáo sư Andrew Wiles đến nước Anh. Ông trở lại Trường Đại học Tổng hợp Cambridge, nơi ông nhận bằng tốt nghiệp từ 20 năm trước. Giáo sư John Coates, nguyên là người hướng dẫn Wiles làm luận án tiến sĩ tại Cambridge, đã tổ chức cuộc hội thảo về lý thuyết Iwasawa - một chuyên ngành đặc biệt của lý thuyết số - ngành học mà Wiles đã viết luận án và am hiểu rất rộng. Coates đã hỏi người sinh viên cũ của mình có muốn trình bày tại hội nghị một bài thuyết trình ngắn khoảng 1 giờ về chủ đề anh tự chọn không. Anh chàng Wiles nhút nhát - người trước đây hần hủu mới nói ở nơi đông người - đã làm cho người thầy cũ cũng như những người tổ chức hội nghị hết sức ngạc nhiên khi anh xin được trình bày 3 giờ.

Khi tới Cambridge, anh chàng Wiles 40 tuổi thật đúng là một nhà toán học đặc trưng: áo sơ mi trắng dài tay xắn lên một cách cẩu thả, cặp kính gọng sừng dày cộm, những lọn tóc thừa và nhạt màu để lòa xòa. Sinh ra ở Cambridge, sự trở về của anh là một cuộc viếng thăm quê nhà rất đặc biệt - giấc mơ thuở ấu thơ đã trở thành sự thật. Theo đuổi giấc mộng này, Andrew Wiles sống trọn 7 năm qua trong căn gác xép của mình như một người tù thật sự, song anh hy vọng chẳng bao lâu sự hy sinh, những tháng năm cố gắng và chuỗi ngày cô đơn sẽ kết thúc, anh sẽ sớm có điều kiện dành nhiều thời gian hơn cho vợ và những cô con gái

của mình, những người mà suốt 7 năm qua anh đã gần như không còn thời gian cho họ. Bữa ăn trưa của gia đình thường vắng mặt anh, uống trà buổi trưa anh cũng thường quên, anh chỉ tranh thủ thời gian để ăn tối. Còn bây giờ vinh quang đã thuộc về anh.

Viện Toán học mang tên nhà khoa học vĩ đại của nhân loại Isaac Newton ở Cambridge mới đây chỉ mở cửa vào dịp Giáo sư Wiles đến công bố công trình của ông trong 3 giờ. Viện Newton rộng lớn nằm ở khu khá đẹp cách Trường Đại học Tổng hợp Cambridge không xa lắm. Ở khu vực sảnh ngoài phòng hội thảo người ta đặt những chiếc ghế sang trọng và tiện lợi để giúp cho các học giả và các nhà khoa học trao đổi ý kiến ngoài cuộc họp nhằm thúc đẩy công việc nghiên cứu và tăng cường hiểu biết.

Mặc dù Wiles biết hầu hết các nhà toán học từ khắp thế giới đến dự hội nghị chuyên ngành lần này nhưng ông vẫn rất kín đáo. Khi các đồng nghiệp biểu lộ sự tò mò về 3 giờ thuyết trình của ông, ông chỉ nói họ nên đến nghe ông trình bày rồi sẽ biết. Tính giữ kẽ như thế là khá đặc biệt, ngay cả đối với một nhà toán học. Dẫu thường chỉ làm việc một mình để chứng minh các định lý và thường được cho là những người không thích tụ hội, các nhà toán học thường xuyên chia sẻ các kết quả nghiên cứu với nhau. Những kết quả này được trao đổi rộng rãi dưới dạng các bản thảo, rồi các tác giả nhận được ý kiến của những người khác giúp họ chỉnh lý các bài báo trước khi xuất bản. Còn Wiles thì không hề đưa ra bản thảo nào và không thảo luận gì về công việc của mình. Tên báo cáo của Wiles là "Dạng modula, đường cong elliptic và biểu diễn Galois", một cái tên chẳng hé mở điều gì, và ngay cả những người cùng chuyên môn với Wiles cũng không thể phỏng đoán được báo cáo sẽ dẫn đến đâu. Những tin đồn ngày càng được nhân thêm.

Ngay ngày đầu, Wiles đã làm cho khoảng 20 nhà toán học đến nghe báo cáo của ông bất ngờ về một thành tựu toán học vĩ đại của mình - và vẫn còn 2 buổi thuyết trình nữa. Sẽ là điều gì đây? Mọi người thấy rõ là cần đến nghe các bài giảng của Wiles và dường như sự chờ đợi càng trở nên căng thẳng hơn khi các nhà toán học đã tập trung theo dõi bài giảng.

Vào ngày thứ 2, Wiles trình bày rất dồn dập. Ông mang theo tập bản thảo hơn 200 trang đầy các công thức và các phép biến đổi, những ý chính được nêu ra như là các định lý mới kèm theo chứng minh tóm tắt mà vẫn rất dài. Căn phòng giờ đây đã kín chỗ. Mọi người chăm chú nghe. Sẽ dẫn đến đâu đây? Wiles vẫn giấu kín. Ông vẫn bình thản trình bày và biến mất rất nhanh khi ngày làm việc kết thúc.

Hôm sau, thứ tư 23/6/1993, là ngày thuyết trình cuối cùng của ông. Khi Wiles tới gần hội trường lớn, ông thấy cần phải vào hội trường ngay. Người ta đứng chặn hết cả lối vào, còn trong phòng thì đông nghẹt người. Rất nhiều người mang theo camera. Đến khi Wiles viết lên bảng các định lý và các công thức tưởng như là vô tận thì sự căng thẳng lên cao độ. "Chỉ có thể có một đường tiến lên duy nhất, một kết thúc duy nhất cho báo cáo của Wiles", sau này Giáo sư Ken Ribet ở Trường Đại học Tổng hợp California tại Berkeley đã nói với tôi như vậy. Wiles đang viết những dòng cuối cùng của chứng minh một giả thuyết toán học phức tạp và khó hiểu: Giả thuyết Shimura-Taniyama. Thế rồi, bất chợt ông thêm một dòng cuối cùng, một phương trình cổ điển mà 7 năm trước Ken Ribet đã chứng minh là hệ quả của giả thuyết này. "Và điều này chứng minh Định lý Fermat", ông bình thản nói. "Tôi nghĩ là tôi kết thúc bài thuyết trình ở đây".

Phòng họp chợt lặng đi trong chốc lát. Rồi sau đó cả hội trường nồng nhiệt vỗ tay tán thưởng. Máy ảnh nháy liên tiếp khi mọi người đứng dậy chúc mừng Wiles đang mỉm cười. Chỉ vài phút sau, khắp nơi trên thế giới các máy fax và thư điện tử đã hoạt động liên tục để truyền tin này. Một bài toán nổi tiếng của mọi thời đại đã được giải xong.

"Một điều không lường trước được là ngay hôm sau chúng tôi đã bị giới báo chí thế giới săn tới tấp", Giáo sư John Coates nhớ lại. Chính ông là người đã tổ chức hội nghị mà không hề nghĩ rằng hội nghị đó sẽ trở thành nơi công bố một trong những thành tựu toán học vĩ đại nhất. Những dòng đầu của các tờ báo trên khắp thế giới đưa tin dồn dập về cú đột phá bất ngờ này. Trang nhất tờ Thời báo New York số ra ngày 24/6/1993 đưa tin: "Cuối cùng rồi thì tiếng reo 'Eureka' đã vang lên trong lâu đài đầy bí ẩn và cổ kính của toán học". Trên tờ Bưu điện Washington, bài báo chính gọi Wiles là "Người chinh phục Toán học", còn khắp mọi nơi các bài phóng sự mô tả một con người đã giải quyết được vấn đề gay gắt nhất trong toán học, bài toán thách đố loài người suốt hơn 350 năm. Sau một đêm, một cái tên rất riêng và bình dị - Andrew Wiles - đã trở thành một cái tên quen thuộc với mọi nhà.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665) là một luật sư đồng thời là một nhà toán học nghiệp dư người Pháp. Ông là một nhà toán học nghiệp dư vì ban ngày ông phải làm việc của một luật sư. Vào nửa đầu thế kỷ XX, nhà nghiên cứu lịch sử toán học nổi tiếng E.T. Bell đã hóm hỉnh gọi Fermat là "Hoàng tử của những người nghiệp dư". Bell cho rằng Fermat đã đạt được nhiều thành tựu toán học quan trọng hơn hầu hết các nhà toán học "chuyên nghiệp" cùng thời với ông. Bell đánh giá Fermat là một nhà toán học đặc thù nhất ở thế kỷ XVII, thế kỷ đã

ghi nhận thành tựu của một vài thiên tài trong số những thiên tài toán học vĩ đại nhất của mọi thời đại [\[1\]](#).

Một trong những thành tựu kinh ngạc nhất của Fermat là việc ông đã phát triển các tư tưởng cơ bản của môn giải tích, điều mà ông đã làm trước khi Issac Newton ra đời 13 năm. Lịch sử nhân loại đã ghi nhận Newton và Gottfried Wilhelm von Leibniz, người cùng thời với ông, là những người đã tìm ra lý thuyết toán học của chuyển động, gia tốc, lực, quỹ đạo, và nhiều khái niệm toán học ứng dụng khác về sự thay đổi liên tục mà chúng ta gọi là các phép toán giải tích.

Fermat rất say mê các công trình toán học của người Hy Lạp cổ đại. Có khả năng chính các công trình của các nhà toán học Hy Lạp cổ đại là Archimedes (thế kỷ III trước Công nguyên) và Eudoxus (thế kỷ IV trước Công nguyên) đã gợi ý cho Fermat xây dựng khái niệm các phép toán giải tích. Bất kỳ lúc nào có thời gian là Fermat nghiên cứu các công trình toán học cổ mà vào thời ông người ta đã dịch sang tiếng Latinh. Ông hoàn thành công việc chính của một luật sư có uy tín, nhưng sở thích của ông, niềm say mê của ông là cố gắng tổng quát hóa các công trình toán học cổ điển và tìm ra nét đẹp mới trong kho tàng các phát minh đã bị chôn vùi rất lâu rồi. "Tôi đã tìm được rất nhiều định lý đẹp vô cùng", có lần ông đã nói như vậy. Ông ghi vội những định lý này vào lề bản dịch những cuốn sách cổ mà ông có.

Fermat là con trai của một nhà buôn đồ da, ông Dominique Fermat, người từng là phó quan tổng tài của một thị trấn thuộc tỉnh Beaumont-de-Lomagne. Mẹ ông là bà Claire de Long, con gái một gia đình luật gia quyền quý. Cậu bé Fermat ra đời tháng 8 năm 1601 (Lễ đặt tên Chúa vào ngày 20 tháng 8 ở Beaumont-de-Lomagne), và được cha mẹ nuôi dưỡng để trở thành một quan tòa. Ông học ở Toulouse, và ngay tại thành phố này, vào năm 30 tuổi ông đã được bầu làm ủy viên công tố. Cũng vào năm 1631 đó ông cưới Louise Long, người em họ về đẳng ngoại. Vợ chồng ông có được 3 người con trai và 2 người con gái. Sau khi Fermat qua đời, Clement Samuel - con trai ông, làm theo di chúc của Fermat, đã xuất bản các công trình của cha mình. Chính nhờ cuốn sách này mà chúng ta biết được định lý cuối cùng nổi tiếng của Fermat. Clement Samuel de Fermat đã nhận thấy tầm quan trọng của định lý được viết nguệch ngoạc ở bên lề sách và trong lần tái bản tuyển tập các công trình cổ ông đã bổ sung thêm vào đó định lý này.

Fermat sống một cuộc đời trầm lặng, ổn định và bình yên. Ông làm việc với lòng tự trọng và chân thực. Vào năm 1648 ông đã được tiến cử giữ một vị trí quan trọng - ủy viên Hội đồng tư vấn của Nghị viện Toulouse và giữ tước hiệu này suốt 17 năm cho đến khi ông qua đời năm 1665. Đánh giá công lao to lớn mà Fermat đã cống hiến cho triều đình, một cuộc đời tận tụy, đầy sáng tạo và có ích cho khoa học, nhiều sử gia đã sửng sốt không hiểu ông lấy

đâu ra thời gian và trí lực để làm toán học cao cấp và đã làm rất thành công như vậy. Một chuyên gia Pháp cho rằng việc làm công chức của Fermat là vốn quý cho việc nghiên cứu toán học của ông bởi vì những người làm ở Nghị viện Pháp phải giảm thiểu các cuộc tiếp xúc không chính thức để tránh sự mua chuộc và các tệ nạn tham nhũng. Từ đó Fermat nảy sinh ý muốn quên đi cái công việc nặng nề của mình và đồng thời vì ông phải hạn chế mình trong tiếp xúc xã hội, toán học có thể là cách giúp ông thoát ra khỏi công việc rất tốt. Các ý tưởng về giải tích không phải là thành tựu duy nhất của Fermat. Ông đã mang đến cho chúng ta cả Lý thuyết số. Một yếu tố quan trọng của Lý thuyết số là khái niệm số nguyên tố.

Các số nguyên tố

Các số 2, 3 là các số nguyên tố. Số 4 không phải là nguyên tố vì nó là tích của $2 \times 2 = 4$. Số 5 là số nguyên tố. Số 6 không phải là số nguyên tố vì, giống như 4, nó là tích của hai số $2 \times 3 = 6$. Số 7 là số nguyên tố, số 8 không phải vì $2 \times 2 \times 2 = 8$, số 9 không phải vì $3 \times 3 = 9$, và số 10 cũng không phải vì $2 \times 5 = 10$. Nhưng số 11 lại là số nguyên tố vì không có các số nguyên (khác với chính 11 và 1) mà tích của chúng bằng 11. Và ta có thể tiếp tục quá trình này: 12 không phải là số nguyên tố, 13 là số nguyên tố, 14 không phải là số nguyên tố, 15 không phải là số nguyên tố, 16 không phải là số nguyên tố, 17 là số nguyên tố, và v.v... Ở đây không có một quy luật rõ ràng nào, ví dụ như mọi số thứ tư không phải là số nguyên tố chẳng hạn, hay thậm chí một cấu trúc lặp lại phức tạp nào đó cũng không có. Khái niệm số nguyên tố là một điều bí ẩn lớn đối với con người từ rất xa xưa. Số nguyên tố là thành phần cơ bản trong Lý thuyết số và việc không có dấu hiệu dễ nhận biết số nguyên tố làm cho Lý thuyết số trở thành một lĩnh vực khá đa dạng và phong phú, các bài toán về lĩnh vực Lý thuyết số chẳng có gì chung, rất khó giải và không có liên hệ rõ ràng với các lĩnh vực toán học khác. Theo cách nói của Barry Mazur thì "Lý thuyết số dễ dàng đặt ra vô số bài toán mà bao quanh chúng là một bầu không khí trinh nguyên và dịu ngọt, là những bông hoa đầy quyến rũ; và còn nữa... Lý thuyết số cũng chứa đầy sâu bọ đang rình rập để cắn vào ai đắm say những bông hoa đầy hương sắc, và người nào đã một lần bị cắn càng cố gắng hết sức để đạt được mong muốn của mình" [\[2\]](#).

Một dòng ghi chú nổi tiếng trên lề sách Fermat như bị mê hoặc trước sự quyến rũ của những con số. Ông tìm thấy cái đẹp và ý nghĩa ở các con số. Trong Lý thuyết số, ông đã nêu lên một số định lý, trong đó có một định lý nói rằng mọi số có dạng $2^{(2 \text{ lũy thừa } n)} + 1$ (2 nâng lên lũy thừa hai mũ n, cộng 1) là một số nguyên tố. Sau này người ta phát hiện là định lý sai vì có một số số có dạng như vừa nêu nhưng không phải là số nguyên tố.

Trong số những bản dịch các tác phẩm cổ điển ra tiếng Latinh mà Fermat yêu quý có cuốn Số học (Arithmetica) của nhà toán học Hy Lạp Diophantus sống ở Alexandria vào thế kỷ III. Vào khoảng năm 1637, Fermat đã viết trên lề cuốn sách này, ngay cạnh bài toán phân tích một số chính phương thành tổng của hai số chính phương, mấy dòng chữ Latinh:

"Mặt khác, không thể phân tích một lập phương thành tổng của hai lập phương, hoặc một trùng phương thành tổng của hai trùng phương, hay - một cách tổng quát - bất kỳ một lũy thừa nào khác 2 thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã tìm được một chứng minh thật tuyệt diệu cho nhận xét này, nhưng đáng tiếc lề sách không đủ rộng để ghi ra đây."

Điều khẳng định bí ẩn trên đã làm cho nhiều thế hệ các nhà toán học phải cố gắng hết sức để đưa ra "một chứng minh thật tuyệt diệu"- điều mà Fermat khẳng định là đã hoàn tất. Nội dung của mệnh đề thoát nhìn tưởng đơn giản đó là: trong khi bình phương của một số số nguyên có thể phân tích thành tổng hai bình phương của các số nguyên khác (ví dụ, 5 bình phương (25) bằng tổng của 4 bình phương (16) và 3 bình phương (9)), nhưng điều tương tự không xảy ra đối với lập phương của một số nguyên hay các lũy thừa bậc cao hơn. Trong những năm đầu thế kỷ XIX, tất cả các định lý khác của Fermat hoặc đã được chứng minh hoặc đã bị bác bỏ. Mệnh đề tưởng như đơn giản trên đây vẫn chưa chứng minh hoặc bác bỏ được, và vì vậy người ta đặt cho nó tên gọi "Định lý cuối cùng của Fermat". Định lý đó có đúng không? Thậm chí trong thế kỷ của chúng ta, máy tính đã được huy động để cố gắng kiểm tra tính đúng đắn của định lý này. Máy tính có thể kiểm tra định lý đối với các số rất lớn, nhưng nó không thể làm với tất cả các số. Định lý này có thể được thử với hàng tỷ con số, nhưng sẽ vẫn còn nhiều vô hạn số - và nhiều vô hạn các lũy thừa - phải kiểm tra. Để khẳng định tính đúng đắn của Định lý cuối cùng của Fermat cần phải có một chứng minh toán học chặt chẽ. Vào đầu thế kỷ XIX các Viện hàn lâm khoa học Đức và Pháp đã đưa ra các giải thưởng cho bất kỳ ai tìm được phép chứng minh và mỗi năm hàng nghìn nhà toán học, những người làm toán nghiệp dư và cũng có cả những người lập dị, đã gửi "các chứng minh" về tòa soạn các tạp chí toán học và các hội đồng giám khảo. Tuy vậy, tất cả vẫn là con số không.

Tháng 7, 8/1993 - Phát hiện một kẻ hớ quan trọng

Các nhà toán học đã lạc quan một cách thận trọng khi mà Wiles rời khỏi bức báo cáo vào cái ngày Thứ Tư của Tháng Sáu ấy. Cuối cùng thì một vấn đề nan giải hơn 350 năm nay dường như đã được giải quyết. Sử dụng các lý thuyết và các khái niệm toán học phức tạp - những công cụ toán học chưa có ở thời Fermat và thậm chí là cho đến tận thế kỷ XX mới có - Wiles đã đưa ra một chứng minh dài đòi hỏi sự đánh giá của nhiều chuyên gia khác nhau. Chứng minh này đã được gửi đến một số nhà toán học đầu đàn. Có lẽ 7 năm làm việc đơn độc trong căn gác xép khuất nẻo của Wiles đã có kết quả rồi. Nhưng sự lạc quan chẳng kéo dài được bao lâu. Mấy tuần sau, một kẽ hở trong logic chứng minh của Wiles đã bị phát hiện. Wiles cố gắng lấp đi kẽ hở này, nhưng kẽ hở vẫn cứ trơ ra đó. Nhà toán học của thành phố Princeton là Peter Sarnak, bạn thân của Andrew Wiles, đã chứng kiến hàng ngày Wiles đánh vật với phép chứng minh mà mới 2 tháng trước tại Cambridge, ông đã công bố với cả thế giới rằng ông đã hoàn tất. "Cứ như thể là Andrew đang cố gắng trải một tấm thảm quá cỡ lên nền nhà", Sarnak giải thích. "Anh ấy kéo nó ra thì tấm thảm vừa khít cạnh bên này căn phòng, nhưng ở phía bên kia nó lại trườn lên tường, thế là anh ấy lại phải bước tới kéo nó xuống... nhưng rồi nó lại phồng lên ở chỗ khác. Việc tấm thảm có cỡ đúng với kích thước của căn phòng không thì anh không thể xác định được". Wiles lại lách vào căn gác xép của mình. Các phóng viên của tờ Thời báo New York và phương tiện thông tin đại chúng đã để yên cho ông trở lại với công việc đơn độc của mình. Khi thời gian cứ dần trôi đi mà chưa tìm được cách khắc phục kẽ hở trong chứng minh, các nhà toán học và công chúng nói chung lại bắt đầu tự hỏi không biết Định lý cuối cùng của Fermat có hoàn toàn đúng hay không. Chứng minh tuyệt diệu mà Giáo sư Wiles đã trình bày để thuyết phục cả thế giới cũng chẳng mang lại điều gì cụ thể hơn chính những dòng chữ của Fermat: "Chứng minh thật tuyệt diệu nhưng đáng tiếc lẽ sách không đủ rộng để ghi ra đây."

Khoảng giữa sông Tigris và sông Euphrates, Circa, 2000 năm trước Công nguyên.

Câu chuyện về Định lý cuối cùng của Fermat là câu chuyện cổ, cổ hơn chính cả Fermat nhiều. Thậm chí nó còn cổ xưa hơn cả Diophantus - người có các công trình mà Fermat đã cố gắng tổng quát hóa. Gốc gác của cái định lý có vẻ đơn giản mà lại rất sâu sắc này cũng lâu đời như chính nền văn minh của loài người. Nguồn gốc của định lý có từ thời đại văn hóa đồ đồng, một nền văn hóa đã rất phát triển ở vùng Fertile Crescent nằm giữa hai con sông Tigris và sông Euphrates của Babylon cổ đại (phần lãnh thổ nay thuộc Iraq). Khi mà Định lý cuối cùng của Fermat còn là một khẳng định trừu tượng chẳng có ứng dụng gì trong khoa học, kỹ thuật, toán học, thậm chí ngay cả trong Lý thuyết số là nơi thích hợp nhất với định lý này, thì cội nguồn của nó đã được hình thành từ 2000 năm trước Công nguyên trong đời sống hàng ngày của người dân Mesopotamia.

Ở thung lũng Mesopotamia, thời kỳ từ năm 2000 đến năm 600 trước Công nguyên được xem là thời đại của người Babylon. Thời kỳ này đã chứng kiến sự phát triển rực rỡ của một nền văn hóa, bao gồm chữ viết, việc sử dụng các bánh xe và phát triển nghề luyện kim. Một hệ thống kênh đào đã được sử dụng để tưới tiêu cho những vùng đất rộng lớn nằm giữa hai con sông. Khi nền văn minh ở thung lũng màu mỡ của Babylon đã phát triển phồn thịnh, những người Cổ Đại sống ở đây học cách buôn bán và xây dựng những thành phố sầm uất như Babylon và Ur (nơi sinh của Abraham). Thậm chí sớm hơn nữa, vào cuối thiên niên kỷ IV trước Công nguyên, chữ viết thô sơ đã được phát minh ra ở thung lũng Mesopotamia và cả ở thung lũng sông Nile. Ở Mesopotamia có rất nhiều đất sét và nhiều dấu vết hình cái nêm đã được khắc sâu vào những viên gạch đất sét mềm bằng bút trâm (dùng ở thời cổ). Sau đó người ta nung những viên gạch đó trong lò hoặc phơi nắng cho nó khô cứng lại. Dạng chữ viết như thế được gọi là chữ hình nêm (cuneiform). Tên gọi này có gốc từ chữ Latinh *cuneus* - nghĩa là cái nêm. Chữ hình nêm là kiểu chữ viết đầu tiên trên thế giới. Ngành thương mại và ngành xây dựng ở Babylon và Ai Cập cổ đại đã đòi hỏi phải có phương pháp đo lường chính xác. Các nhà khoa học đầu tiên của các xã hội thời đại đồ đồng đã nghiên cứu cách ước lượng tỷ lệ giữa chu vi và đường kính của một hình tròn và họ đã tìm ra một số gần giống với số mà ngày nay ta gọi là số pi. Những người đã từng xây dựng công trình Ziggurat khổng lồ, tháp nhà thờ Babel và Khu vườn treo - một trong bảy kỳ quan của thế giới Cổ Đại, cần có cả cách thức tính diện tích và thể tích.

Sự giàu có là một đại lượng bình phương

Một hệ thống số phức tạp đã được phát triển trên cơ sở 60. Các kỹ sư và các nhà xây dựng người Babylon đã có thể tính toán các khối lượng cần thiết cho công việc hàng ngày của họ. Số bình phương xuất hiện một cách tự nhiên trong cuộc sống, mặc dù vậy ngay từ cái nhìn đầu tiên thì không hẳn là như thế. Việc bình phương các con số có thể được xem như là cách biểu đạt sự giàu có. Sự thịnh vượng của người nông dân phụ thuộc vào tổng số hoa màu mà anh ta có thể sản xuất ra. Thế rồi số hoa màu đó, đến lượt mình, lại phụ thuộc vào *diện tích* trồng trọt mà người nông dân có. *Diện tích* là tích số của chiều dài và chiều rộng của thửa ruộng, và đây là chỗ dẫn tới phép bình phương. Một thửa ruộng mà có chiều dài và chiều rộng cùng bằng a thì có diện tích bằng a^2 . Do vậy, theo ý nghĩa này thì sự giàu có là một đại lượng bình phương.

Những người Babylon cũng muốn biết khi nào thì bình phương của một số nguyên có thể phân tích thành tổng bình phương của các số nguyên khác. Một người nông dân, làm chủ một thửa ruộng rộng 25 đơn vị vuông có thể đổi nó lấy hai mảnh ruộng hình vuông: một mảnh rộng 16 đơn vị vuông còn mảnh kia rộng 9 đơn vị vuông. Vậy một mảnh ruộng rộng 5

đơn vị x 5 đơn vị tương đương với hai mảnh - một mảnh rộng 4 đơn vị x 4 đơn vị và mảnh kia rộng 3 đơn vị x 3 đơn vị. Đây là thông tin quan trọng cho việc giải quyết một bài toán thực tế. Ngày nay ta trình bày mối quan hệ này dưới dạng đẳng thức : $5^2 = 4^2 + 3^2$. Và các bộ ba những số nguyên như thế - ở đây nói riêng là 3, 4 và 5 - mà các bình phương của chúng thỏa mãn hệ thức trên, được gọi là các bộ ba Pythagoras - mặc dù người Babylon biết những bộ số như thế từ hàng ngàn năm trước thời đại của nhà toán học Hy Lạp nổi tiếng Pythagoras, nhưng tên của ông vẫn được lấy để đặt cho các bộ ba số nguyên đó. Chúng ta biết được điều này từ một viên gạch đất sét đặc biệt có niên đại khoảng 1900 năm trước Công nguyên.

"Plimpton 322" Những người Babylon đã để tâm tới các bảng biểu. Tận dụng nguồn đất sét phong phú và kỹ thuật viết chữ hình nêm, họ đã tạo nên rất nhiều bảng biểu. Ngày nay vẫn còn nhiều bảng biểu đó vì các viên gạch bằng đất sét rất bền. Chỉ riêng tại nơi ở của người Nippur cổ đại người ta đã tìm thấy hơn 50.000 viên và hiện đang được trưng bày thành các bộ sưu tập trong các bảo tàng ở Yale, Columbia, ở Trường Đại học Tổng hợp Pennsylvania và ở nhiều nơi khác. Rất nhiều viên gạch như thế bám đầy bụi bặm đang nằm dưới tầng hầm của các viện bảo tàng, chưa được đọc đến và cũng chưa được giải mã.

Có một viên gạch đã giải mã được và rất đáng chú ý. Viên gạch này thuộc bảo tàng của Trường Đại học Tổng hợp Columbia và nó có tên là Plimpton 322. Trên viên gạch đó có 15 bộ ba các con số. Mỗi bộ ba có tính chất như sau: số thứ nhất là một số chính phương và là tổng của hai số còn lại mà mỗi số cũng là một số chính phương. Bảng này có 15 bộ ba Pythagoras [\[3\]](#). Các số $25 = 16 + 9$ đã được nêu ở phần trên là một bộ ba Pythagoras. Trên viên gạch Plimpton 322 có một bộ ba Pythagoras khác là : $169 = 144 + 25$ (tức là $13^2 = 12^2 + 5^2$). Không phải tất cả các học giả đều đồng ý với cách lý giải về sự quan tâm của người Babylon cổ đại đối với các số đó. Có thuyết cho rằng sự quan tâm này chỉ nhằm mục đích thực tế và quả là thực tế họ đã sử dụng hệ thống số với cơ số 60, vì vậy họ đã thường chọn dùng các số nguyên hơn là các phân số để giải các bài toán thực tế với các số nguyên chính phương. Nhưng các nhà chuyên môn khác thì cho rằng các con số vốn có cái thú vị riêng mà chính chúng có thể là động lực khiến người Babylon chú ý đến các số chính phương. Có điều, cho dù là vì lý do gì đi nữa thì Plimpton 322 vẫn có thể dùng làm công cụ để dạy sinh viên giải các bài toán trong đó các con số là các số chính phương.



Thư viện gồm các sách và bản thảo quý hiếm.
Trường Đại học Tổng hợp Columbia.

Phương pháp của người Babylon không nhằm phát triển một lý thuyết tổng quát để giải các bài toán như thế, mà đúng hơn là cung cấp các bảng liệt kê bộ ba số để dạy học sinh đọc và sử dụng các bảng đó.

Hội số học cổ đại - Những người sùng bái đã thề giữ bí mật

Pythagoras sinh ra tại đảo Samos, Hy Lạp, khoảng năm 580 trước Công nguyên. Ông đã đi nhiều nơi trên thế giới và đã đến thăm Babylon, Ai Cập và thậm chí có thể đã đến cả Ấn Độ nữa. Trong các chuyến đi của mình, đặc biệt khi đến Babylon, ông đã liên hệ với các nhà toán học và dường như ông đã biết các công trình nghiên cứu của họ về những con số mà ngày nay chúng mang tên ông: các bộ ba Pythagoras - điều mà các nhà khoa học và các nhà toán học Babylon đã biết đến từ hơn 1500 năm trước Pythagoras. Pythagoras đã làm quen với những người xây dựng các công trình nghệ thuật và kiến trúc nghệ thuật Hy Lạp và có thể ông đã quan tâm đến cả khía cạnh toán học của các kỳ quan này. Trong các chuyến đi của mình, Pythagoras cũng đã cảm thụ các tư tưởng triết học và tôn giáo phương Đông.

Khi Pythagoras trở về Hy Lạp, ông đã rời đảo Samos chuyển đến Crotona, một địa danh thuộc vùng vịnh hình chiếc ủng của Italia. Một điều thật thú vị là chắc chắn Pythagoras đã tận mắt nhìn thấy bảy kỳ quan của thế giới Cổ Đại. Một trong bảy kỳ quan đó là Đền Hera tại Samos - nơi sinh của Pythagoras. Ngày nay tất cả tàn tích của ngôi đền tráng lệ này chỉ còn duy nhất một cây cột trụ lại trong số hàng trăm cây cột và nơi đó chỉ cách thành phố Pythagorion ngày nay - thành phố mang tên người con vinh quang của xứ đảo - một đoạn đường ngắn. Vượt qua eo biển vài dặm về phía Bắc, nơi thuộc Thổ Nhĩ Kỳ ngày nay, là di tích của một trong bảy kỳ quan khác của thế giới thời Cổ Đại - Ephesus. Cận đó về phía Nam Samos là bức tượng Rhodes khổng lồ. Pythagoras cũng đã tới Kim tự tháp và Sphinx ở Ai Cập; và khi đến Babylon chắc chắn ông đã chiêm ngưỡng Khu vườn treo.

Thời ấy vùng vịnh hình chiếc ủng của Italia bao gồm Crotona (nơi Pythagoras sinh sống) và phần lớn diện tích phía Nam nước Italia là một phần của "Thế giới Hy Lạp" - Magna Graecia. "Vương quốc Hy Lạp bao la" thời đó độc chiếm toàn bộ vùng phía Đông Địa Trung Hải, kể cả Alexandria thuộc Ai Cập cùng đông đảo cư dân gốc Hy Lạp sống ở đó - nơi mà con cháu họ vẫn tiếp tục cư ngụ cho đến những năm đầu của thế kỷ XX. Cách Crotona không xa là các hang động mà các nhà tiên tri trú ngụ kiểu như động của Delphi, một người được cho là có thể nói trước được số phận và tương lai của con người và các dân tộc.

"Con số là tất cả"

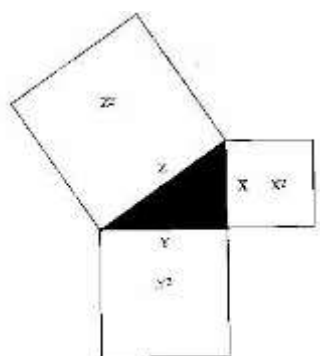
Tại một vùng đất hoang lạnh lẽo bao quanh vùng đất cao nhất của Italia, Pythagoras đã nhóm lập một hội bí mật để tiến hành nghiên cứu các con số. Các thành viên của hội này cùng mang cái tên quen thuộc - môn đệ của Pythagoras. Người ta cho rằng chính cái hội bí mật này đã ngầm phát triển một phần đáng kể của khối tri thức toán học. Các môn đệ của Pythagoras đã thống nhất theo đuổi một luận điểm triết học riêng được tóm tắt trong khẩu hiệu của họ: Con số là tất cả. Họ tôn sùng những con số và tin rằng chúng có những tính chất thần diệu. Họ rất thú vị với cái gọi là số hoàn thiện. Một trong các định nghĩa về số hoàn thiện, khái niệm được dùng cho đến cả thời Trung Cổ và xuất hiện trong các hệ bí ẩn, chẳng hạn như hệ Kabbalah của người Do Thái, nói rằng số hoàn thiện là một số bằng tổng các ước số của nó, khác chính nó. Một ví dụ về số hoàn thiện đẹp nhất và đơn giản nhất là số 6. Số 6 là bội của 3, 2 và 1. Các số này là ước số của 6 và ta có: $6 = 3 \times 2 \times 1$. Cũng cần để ý rằng nếu ta cộng các ước số đó lại ta sẽ nhận được chính số 6 ($6 = 3+2+1$). Theo định nghĩa nêu trên, 6 là một số hoàn thiện: Một số hoàn thiện khác là 28 vì các ước số của 28 (không kể chính nó) là 1, 2, 4, 7, 14 và ta cũng có: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Các môn đệ của Pythagoras sống theo trường phái khổ hạnh và là những người ăn chay thật sự. Nhưng họ không ăn đậu hạt vì cho rằng nó giống như hòn... của đàn ông. Mỗi bận tâm của họ về con số mang đậm màu sắc tôn giáo và thuyết ăn chay nghiêm ngặt của họ cũng có nguồn gốc từ tín ngưỡng tôn giáo. Nếu cho đến thời Pythagoras không còn lưu truyền lại được một tài liệu nào thì thời kỳ sau đó đã để lại cho hậu thế rất nhiều tài liệu viết về bậc thầy lỗi lạc này cùng những môn đệ của ông và chính Pythagoras đã được đánh giá là một

trong số những nhà toán học vĩ đại nhất của thời kỳ Cổ Đại. Ông là người đã tìm ra định lý Pythagoras về bình phương các cạnh của một tam giác vuông, điều có liên hệ mật thiết với các bộ ba số Pythagoras và tất nhiên là với cả Định lý cuối cùng của Fermat tận 2000 năm sau đó.

Bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh kia...

Định lý nêu trên có nguồn gốc ở Babylon, bởi vì người Babylon đã hiểu tường tận các bộ ba số Pythagoras. Tuy nhiên, Pythagoras và các môn đệ đã có công phát biểu định lý dưới dạng hình học và vì vậy định lý có tính tổng quát cao hơn nhiều so với các số tự nhiên đơn thuần (các số nguyên dương). Định lý Pythagoras phát biểu rằng bình phương cạnh huyền của một tam giác vuông bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại - như minh họa ở hình 1.

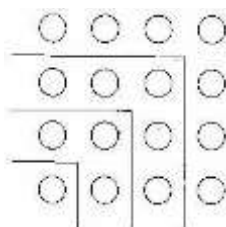


Hình 1

Khi chiều dài cạnh huyền là một số nguyên (chẳng hạn là 5, bình phương của 5 là 25), thì cách phân tích theo Pythagoras dưới dạng tổng hai bình phương sẽ là số nguyên 4 (bình phương là 16) và 3 (bình phương là 9). Như thế, khi áp dụng định lý Pythagoras đối với các số nguyên (chẳng hạn như các số nguyên 1, 2, 3,...) ta nhận được các bộ ba số Pythagoras - điều này đã được biết đến từ 1000 năm trước đó ở Babylon.

Một cách tình cờ, các môn đệ của Pythagoras đã phát hiện ra rằng các số chính phương là tổng của một dãy các số lẻ. Chẳng hạn, $4 = 1 + 3$; $9 = 1 + 3 + 5$; $16 = 1 + 3 + 5 + 7$, v.v... Họ mô

tả tính chất này bởi một dãy các số được sắp xếp trong một sơ đồ dạng hình vuông. Khi cộng một số lẻ các ô tròn nằm dọc theo hai cạnh kề nhau với số chính phương trước đó, ta nhận được một số chính phương mới :



Hình 2

Các số nguyên, các phân số và gì nữa ? Từ xa xưa người Babylon và người Ai Cập đã biết đến các số nguyên và các phân số (ví dụ: $1/2$, $1/3$, $5/8$, $147/1769$, v.v...). Các môn đệ của Pythagoras không dừng ở đó mà còn tiến xa hơn nhiều. Họ là những người đã phát hiện ra số vô tỷ - đó là các số không thể viết dưới dạng các phân số, mà phải viết ở dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Số pi ($3,141592654\dots$) - tỷ số giữa chu vi và đường kính của một đường tròn - là một ví dụ về số vô tỷ. Số pi là một số thập phân vô hạn; ta không thể viết ra hết các chữ số thập phân của nó vì chúng là các số khác nhau và không bao giờ kết thúc. Để mô tả, đơn giản ta gọi là pi và dùng ký hiệu pi, hoặc là ta cũng có thể lấy xấp xỉ của pi bằng cách chỉ viết đến một chữ số thập phân nào đó, chẳng hạn: $3,14$; $3,1415$; v.v...

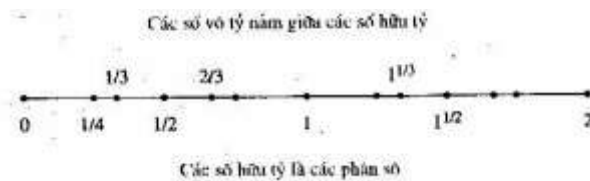
Ngày nay người ta đã có thể dùng máy tính để tính được số pi với phần thập phân tới hơn một triệu chữ số nhưng rất ít khi cần thiết phải làm như thế. Từ thiên niên kỷ thứ hai trước Công nguyên người Babylon và người Ai Cập đã biết đến số pi với các giá trị gần đúng khác nhau. Họ lấy áng chừng pi bằng 3 và số pi xuất hiện như là hệ quả của việc phát minh ra bánh xe. Số pi cũng xuất hiện trong các số đo khác nhau của kim tự tháp Ai Cập. Thậm chí số pi đã được đề cập đến trong Kinh thánh cổ: ở Chương I, Mục 7, Điều 23 khi đọc về những thành lũy hình tròn mà con người đã xây dựng. Dựa trên số đơn vị đo của chu vi và đường kính, ta có thể kết luận được là những người Do Thái cổ đại đã lấy "áng chừng" giá trị của số pi là 3.

Các môn đệ của Pythagoras cũng nhận thấy căn bậc hai của 2 là một số vô tỷ. Khi áp dụng định lý Pythagoras đối với tam giác vuông có hai cạnh cùng bằng 1, các môn đệ của Pythagoras nhận thấy số đo của cạnh huyền là một số lạ: căn bậc hai của 2. Họ nói rằng số

đó không phải là một số nguyên, thậm chí không phải là một phân số. Đó là một số có phần thập phân vô hạn không tuần hoàn. Cũng giống như số pi, người ta không thể viết ra được giá trị căn bậc hai của 2 bằng một con số chính xác (1,414213562...) vì phần thập phân vô hạn của nó không có hiện tượng lặp đi lặp lại của một dãy hữu hạn các chữ số kiểu như số 1,857142857142857142857142857..., một số mà người ta không cần phải viết hết tất cả các chữ số thập phân của nó mà vẫn mô tả được nó. Một số nào đó mà có biểu diễn phần thập phân lặp đi lặp lại (trong số vừa nêu, dãy 857142 lặp đi lặp lại mãi trong phần thập phân của nó) là một số hữu tỷ, tức là một số có thể viết dưới dạng a/b , tỷ số của hai số nguyên. Trong ví dụ vừa nêu, hai số nguyên đó là 13 và 7. Tỷ số $13/7$ bằng 1,857142857142857142857142..., ở đây dãy 857142 lặp đi lặp lại mãi.

Các môn đệ của Pythagoras - những người say mê nghiên cứu số học - đã rất ngạc nhiên và có ấn tượng mạnh khi phát hiện ra tính chất vô tỷ của căn bậc hai của 2. Họ thề không bao giờ nói điều đó với bất cứ ai không thuộc trường phái của họ. Nhưng rồi điều bí mật vẫn lọt ra ngoài. Truyền thuyết kể lại rằng chính Pythagoras đã giết chết một thành viên trong nhóm (bằng cách dìm xuống sông) vì người này đã tiết lộ sự tồn tại của các số vô tỷ kỳ lạ đó.

Trên trục số có hai loại số khác nhau: số hữu tỷ và số vô tỷ. Các số hữu tỷ và số vô tỷ lấp đầy toàn bộ trục số. Chúng kề cận nhau vô cùng sát sao. Các số hữu tỷ trù mật khắp nơi trong các số thực. Trong bất kỳ một lân cận nào, dù khoảng đó nhỏ bé thế nào, xung quanh một số hữu tỷ cũng có rất nhiều các số vô tỷ. Ngược lại, xung quanh một số vô tỷ cũng có vô số các số hữu tỷ (hình 3). Cả hai tập hợp số hữu tỷ và số vô tỷ đều vô hạn. Nhưng các số vô tỷ nhiều đến mức vượt xa cả các số hữu tỷ. Bậc vô hạn của chúng cao hơn. Điều này đã được nhà toán học George Cantor (1845 - 1918) chỉ ra vào cuối thế kỷ XIX. Thời đó chỉ có vài người tin Cantor. Leopold Kronecker (1823-1891) - địch thủ tinh quái của Cantor - đã nguyên rủa và chế nhạo Cantor vì các thuyết của ông về vấn đề có bao nhiêu số hữu tỷ và số vô tỷ. Kronecker đã trở nên nổi tiếng với câu nói: "Chúa đã làm ra các số nguyên, tất cả phần còn lại là công việc của con người, nghĩa là ông ta không hề tin sự tồn tại của các số vô tỷ, ví dụ như căn bậc hai của 2 ! (việc xảy ra 2000 năm sau thời Pythagoras). Sự đối kháng của Kronecker là nguyên nhân cản trở làm cho Cantor không nhận được danh hiệu giáo sư của Trường Đại học Tổng hợp Berlin danh tiếng, rồi cuối cùng làm cho Cantor suy sụp nhanh chóng về tinh thần và kết thúc cuộc đời mình trong một bệnh viện tâm thần. Ngày nay, tất cả các nhà toán học đều biết rằng Cantor đã đúng và đúng là có nhiều số vô tỷ hơn các số hữu tỷ, dù rằng cả hai tập hợp số này cùng là các tập hợp vô hạn. Nhưng phải chăng những người Hy Lạp cổ đại cũng đã biết tất cả những điều đó ? [\[4\]](#)



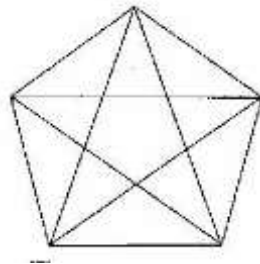
Hình 3

Di sản của Pythagoras

Một khía cạnh quan trọng của cuộc đời Pythagoras - với những nguyên tắc ăn kiêng, với lòng sùng kính các con số, với những cuộc hội họp bí mật và các thủ tục lễ nghi - là sự theo đuổi nghiên cứu môn triết học và toán học như là nền tảng của đạo đức. Người ta cho rằng chính Pythagoras là tác giả của câu nói: "Triết học là tình yêu kiến thức, còn toán học là cái mà ta học được". Pythagoras đã biến môn khoa học toán học thành môn học dưới hình thức giáo dục rộng rãi.

Pythagoras mất vào khoảng năm 500 trước Công nguyên. Ông không để lại một bản thảo nào ghi chép các công trình của mình. Trung tâm của ông ở Crotona đã bị phá hủy khi nhóm chính trị đối lập Sybaritic (nhóm của những kẻ thích xa hoa) bắt sống và sát hại hầu hết các thành viên của Trung tâm. Số người còn lại tản mát đến vùng Địa Trung Hải thuộc Đại vương quốc Hy Lạp. Họ đem theo mình triết học và thuyết thần bí về con số. Trong số những người học được tính triết học của toán học từ những người di tản này có Philolaos ở thành phố Tarentum, người đã nghiên cứu trong một trung tâm mới do các môn đệ của Pythagoras thành lập tại đây. Philolaos là nhà triết học Hy Lạp đầu tiên đã ghi lại lịch sử và các học thuyết của trường phái Pythagoras. Chính nhờ cuốn sách của Philolaos mà Plato đã lĩnh hội được tư tưởng triết học của Pythagoras về số học, vũ trụ học và đạo thần bí mà sau này chính Plato cũng viết về những điều đó. Biểu tượng đặc trưng của trường phái Pythagoras là ngôi sao năm đỉnh nội tiếp trong hình ngũ giác đều. Các đường chéo của ngũ giác (tạo nên ngôi sao năm đỉnh) cắt nhau lại tạo ra một hình ngũ giác đều khác bé hơn theo hướng ngược lại. Nếu lại kẻ các đường chéo của hình ngũ giác bé đó thì một hình ngũ giác mới bé hơn nữa lại được sinh ra; và cứ tiếp tục như thế mãi. Hình ngũ giác và ngôi sao năm đỉnh được tạo thành từ các đường chéo của ngũ giác (hình 4) có một số tính chất kỳ lạ mà các môn đệ của Pythagoras tin rằng đó là điều huyền bí. Mỗi đường chéo chia đường chéo khác thành hai phần không bằng nhau. Tỷ số giữa một đường chéo với đoạn dài hơn đúng bằng tỷ số giữa đoạn dài hơn với đoạn ngắn hơn. Tỷ số này là như nhau đối với tất cả các đường chéo nhỏ nữa. Người ta gọi đó là "Tỷ số vàng". Giá trị của tỷ số này là số vô tỷ 1,618... Nếu lấy 1 chia cho số này thì ta nhận được kết quả là phần thập phân của chính nó, tức là 0,618... Sau này chúng ta sẽ thấy "Tỷ số vàng" xuất hiện trong các hiện tượng tự nhiên cũng

như trong sự cân đối, hài hòa mà mắt con người cảm thấy đẹp. Đó cũng là giới hạn của tỷ số giữa các số Fibonacci nổi tiếng mà ta sắp đề cập tới.

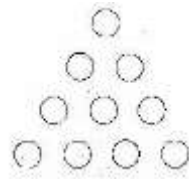


Hình 4

Bạn có thể tìm được "Tỷ số vàng" bằng cách thực hiện dãy các phép toán thú vị sau đây trên một máy tính bỏ túi : tính $1 + 1 =$, sau đó lấy $1/x$, rồi $+ 1 =$, lại lấy $1/x$, rồi $+ 1 =$, lại lấy $1/x$ và cứ tiếp tục như vậy.

Trên máy tính của bạn các số sẽ thay nhau xuất hiện và ngày càng xấp xỉ tới 1,618... và 0,618..., khi mà tập các phép toán được lặp đi lặp lại một số lần đủ lớn. Đó chính là "Tỷ số vàng". Số này bằng căn bậc hai của 5 trừ đi 1 rồi chia cho 2. Đây chính là cách tính "Tỷ số vàng" bằng phương pháp hình học trên cơ sở ngũ giác đều Pythagoras. Vì tỷ số này không bao giờ là tỷ số của hai số nguyên, do đó nó cũng không thể là số hữu tỷ. Điều này chứng minh rằng căn bậc hai của 5 cũng là số vô tỷ. Chúng ta sẽ còn gặp lại "Tỷ số vàng" nhiều lần ở phần sau.

Các môn đệ của Pythagoras đã phát hiện ra rằng sự hài hoà trong âm nhạc tương ứng với các tỷ lệ đơn giản giữa các con số. Theo Aristotle, các môn đệ của Pythagoras đã tin tưởng rằng toàn bộ thiên đường chính là cung bậc âm thanh và các con số. Chính sự hài hoà của âm nhạc và các họa tiết hình học đã làm cho các môn đệ của Pythagoras tin rằng "Tất cả là con số". Những môn đệ của Pythagoras cho rằng các tỷ lệ căn bản trong âm nhạc chỉ gồm các số 1, 2, 3 và 4 mà tổng của chúng bằng 10. Ngược lại, số 10 là cơ số trong hệ thập phân của chúng ta. Các môn đệ của Pythagoras minh họa số 10 bằng một hình tam giác (hình 5) mà họ gọi là bộ bốn số (tetraktys) [\[5\]](#) :



Hình 5

Các môn đệ của Pythagoras coi bộ bốn số như là thần linh, thậm chí họ đã viện vào vị thần này để thề thốt. Theo Aristotle, Ovid và các nhà văn cổ điển khác, số 10 được chọn làm cơ sở cho hệ thập phân là hoàn toàn tình cờ, vì con người có mười ngón tay. Mặt khác, chúng ta nhớ là người Babylon đã sử dụng hệ đếm cơ số 60. Thậm chí đến ngày nay vẫn còn lại dấu vết của các hệ đếm khác. Trong tiếng Pháp, số 80 (quatre-vingt, nghĩa là "bốn lần hai mươi") là chứng tích của một hệ đếm cổ xưa có cơ số là 20.

Dây thừng, sông Nile và sự ra đời của môn hình học

Chúng ta biết được rất nhiều điều về các nhà toán học Hy Lạp cổ đại là nhờ vào cuốn sách "Cơ sở" (Elements) của Euclid - nhà toán học của thành phố Alexandria khoảng 300 năm trước Công nguyên. Có thể tin rằng hai chương đầu trong cuốn "Cơ sở" hoàn toàn viết về các công trình của Pythagoras và hội kín của ông. Những người Hy Lạp cổ đã làm toán vì cái đẹp và các sơ đồ hình học trừu tượng. Người Hy Lạp đã xây dựng toàn bộ lý thuyết hình học mà đến ngày nay lý thuyết đó hầu như không thay đổi và được dùng để giảng dạy trong trường học. Trên thực tế, cuốn "Cơ sở", hoặc những phần còn lại của nó cho đến ngày nay được đánh giá là cuốn sách giáo khoa vĩ đại nhất của mọi thời đại.

Herodotus - nhà sử học nổi tiếng người Hy Lạp thời kỳ Cổ Đại cho rằng môn hình học đã được phát triển ở Ai Cập cổ đại sớm hơn ở Alexandria cũng như các vùng khác thuộc Hy Lạp rất nhiều, từ 3000 năm trước Công nguyên. Ông kể rằng nước tràn từ sông Nile có thể phá hủy bờ bao quanh các cánh đồng trong vùng châu thổ sông Nile màu mỡ, và điều đó đòi hỏi phải có kỹ thuật vẽ bản đồ phức tạp. Để làm được việc này, những người vẽ bản đồ địa chính đã phải xây dựng các khái niệm cũng như các ý tưởng về hình học. Trong cuốn "Lịch sử" của mình, Herodotus viết:

"Nếu sông Nile cuốn trôi một phần trong lô đất của ai đó thì nhà vua cử người đến kiểm tra và xác định chính xác phần đất bị mất đó bằng cánh đo đạc. Từ thực tế này, tôi nghĩ là môn hình học đã được biết đến ở Ai Cập đầu tiên, rồi sau đó mới lan sang Hy Lạp."[\[6\]](#)

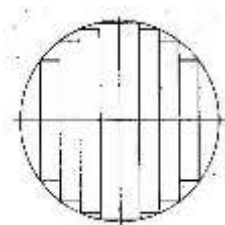
Môn hình học nghiên cứu các hình tạo thành từ các đường tròn, các đường thẳng, các cung tròn, các tam giác và các đường giao nhau của chúng tạo nên các góc khác nhau. Rõ ràng là môn khoa học này rất quan trọng để làm tốt công việc lập bản đồ địa chính. Quả vậy, người ta đã gọi những nhà hình học Ai Cập là "những người căng dây thừng", vì dây được sử dụng để căng làm đường thẳng cần thiết trong việc xây dựng các đền thờ, các kim tự tháp và dùng để định ranh giới giữa các thửa ruộng. Nhưng có khả năng nguồn gốc của môn hình học thậm chí còn xa xưa hơn nữa. Neolithic đã tìm được các ví dụ có tính tương đẳng và tính đối xứng họa tiết, những cái mà các nhà hình học Ai Cập đã làm trước, rồi nhiều thế kỷ sau người Hy Lạp cổ đại thừa kế được. Người Babylon cũng có những mối quan tâm tương tự đối với diện tích ruộng. Điều này đã làm họ có nhu cầu hiểu biết về các số chính phương và mối quan hệ giữa chúng. Những mối quan tâm của người Babylon đã được người Ai Cập chia sẻ vì người Ai Cập cũng vấp phải khó khăn trước những vấn đề chia đất đai cũng như công việc xây dựng các kim tự tháp của họ. Vì thế, có khả năng người Ai Cập cổ đại cũng đã hiểu biết về các bộ ba số Pythagoras. Tuy nhiên, những gì mà người Hy Lạp đã làm với môn hình học là nhằm thiết lập thêm một môn toán học lý thuyết. Họ đã đặt ra các tiên đề và chứng minh các định lý.

Định lý là gì ?

Người Hy Lạp cho chúng ta khái niệm về định lý. Định lý là một mệnh đề toán học đã được chứng minh. Phép chứng minh định lý là một tiến trình lập luận chặt chẽ nhằm chỉ rõ tính đúng đắn của định lý sao cho không một ai có thể bắt bẻ được nếu họ dựa trên các quy tắc logic và chấp nhận một tập các tiên đề đã được đưa ra làm cơ sở cho hệ logic. Các tiên đề của Euclid bao gồm định nghĩa một điểm, một đường thẳng và mệnh đề về hai đường song song không bao giờ cắt nhau. Dựa vào các tiên đề và các phép suy diễn logic, ví dụ như A chứa B và B chứa C thì A chứa C, người Hy Lạp cổ đại đã chứng minh được nhiều định lý hình học rất hay về tam giác, hình tròn, hình vuông, hình ngũ giác, hình lục giác và hình bát giác.

"Eureka! Eureka!"

Hai nhà toán học vĩ đại người Hy Lạp là Eudoxus (408-355 trước Công nguyên) và Archimedes (thế kỷ III trước Công nguyên) đã mở rộng công trình nghiên cứu các hình hình học sang lĩnh vực tính diện tích bằng cách dùng các đại lượng vô cùng bé (nghĩa là bé bao nhiêu cũng được). Eudoxus là người xứ Cnidus. Ông từng là bạn và là học trò của Plato. Ông nghèo đến nỗi không thể sống trong khu Viện Hàn lâm khoa học ở Athens mà phải sống ở nơi giá sinh hoạt rẻ hơn là thị trấn cảng Piraeus. Từ đây hàng ngày ông đến Viện Hàn lâm của Plato. Plato không phải là nhà toán học nhưng ông khuyến khích nghiên cứu toán học, đặc biệt đối với những học trò có năng khiếu - như Eudoxus chẳng hạn. Eudoxus cũng đã đến Ai Cập và ở đây, cũng như ở Hy Lạp, ông nghiên cứu rất nhiều về hình học. Ông đã phát minh ra "Phương pháp vét cạn" (Method of exhaustion), và đã sử dụng nó cùng với các đại lượng vô cùng bé để tìm diện tích các hình hình học. Ví dụ, Eudoxus đã tính được xấp xỉ diện tích hình tròn bằng tổng các diện tích của nhiều hình chữ nhật nhỏ hơn (hình 6) - diện tích của chúng rất dễ tính bằng cách lấy chiều dài nhân chiều rộng. Ngày nay phương pháp này được sử dụng trong các phép tính tích phân và các phương pháp giới hạn hiện đại không khác gì "phương pháp vét cạn" của Eudoxus.



Hình 6

Nhưng Archimedes (287-212 trước Công nguyên) mới đích thực là nhà toán học lỗi lạc nhất của thời kỳ Cổ Đại. Ông đã sống ở thành phố Syracuse trên đảo Sicily. Archimedes là con trai nhà thiên văn học Pheidias và có họ với vua Hieron II của Syracuse. Cũng như Eudoxus, Archimedes đã nghiên cứu về các phương pháp tìm diện tích và thể tích. Những phương pháp đó là khởi nguồn cho ngành giải tích về sau này. Thành quả của ông đã thúc đẩy cả hai phép tính vi phân và tích phân (toán giải tích có hai phần thì Archimedes nắm vững được cả hai). Chủ yếu ông quan tâm đến toán học lý thuyết: số học, hình học, diện tích các hình hình học, v.v..., song ông còn đạt được nhiều thành tựu trong việc ứng dụng toán học. Mọi người đều biết câu chuyện nổi tiếng kể lại sự kiện Archimedes phát hiện ra cái mà ngày nay ta gọi là định luật thủy tĩnh học đầu tiên - định luật phát biểu rằng trọng lượng của vật ngập trong nước bằng trọng lượng phần nước mà vật đó chiếm chỗ. Lúc bấy giờ ở Syracuse có một gã

thợ vàng gian trá và vua Hieron đã yêu cầu nhà toán học bạn mình tìm cách phanh phui điều này. Archimedes đã bắt đầu từ việc nghiên cứu trọng lượng của vật ngập trong nước. Ông dùng chính cơ thể mình trong các cuộc thí nghiệm. Ông sử dụng bồn tắm và làm một số phép đo lường. Khi phát hiện ra định luật, ông nhào ra khỏi bồn tắm rồi cứ thế vừa chạy khắp phố phường Syracuse vừa hô lớn "Eureka, Eureka!" ("Tôi đã tìm ra! Tôi đã tìm ra!").

Archimedes cũng được thừa nhận là người đã phát minh ra "Cánh quạt Archimedes" (Archimedes screw), một dụng cụ để kéo nước lên bằng cách quay một cái tay quay. Nông dân nhiều nơi trên thế giới vẫn thường sử dụng dụng cụ này.

Những năm 214-212 trước Công nguyên, tướng La mã Marcellus tấn công Syracuse. Vua Hieron lại một lần nữa nhờ người họ hàng nổi tiếng của mình giúp đỡ. Khi quân La Mã đang tiến đến, dựa vào các nghiên cứu của mình về đòn bẩy, Archimedes đã sáng chế ra các máy ném đá tuyệt vời và người dân Syracuse đã đẩy lui được quân địch. Nhưng Marcellus lại tập hợp lực lượng và một thời gian sau đã bất ngờ đánh úp từ phía sau và chiếm được Syracuse. Lúc bấy giờ Archimedes không hay biết gì về cuộc tấn công này, ông vẫn ngồi lặng lẽ ở một khu đất cao hơn trong thành và vẽ những hình hình học trên cát. Một tên lính La Mã tiến đến và dẫm chân lên các hình vẽ. Archimedes đã nhảy bật dậy kêu to: "Đừng động vào các hình tròn của tôi!". Ngay tức thì, tên lính rút gươm ra và giết chết nhà toán học lão thành 75 tuổi. Trong di chúc của mình, Archimedes đã yêu cầu cụ thể là: khắc lên bia mộ ông một hình hình học mà ông đặc biệt yêu thích - hình cầu nội tiếp trong hình trụ. Ngôi mộ đã bị bỏ mặc cho mọi thứ che lấp và sau đó thì mất dạng. Nhiều năm sau, Cicero - nhà hùng biện người La Mã - đã tìm được ngôi mộ và tôn tạo lại như cũ. Thế rồi sau đó cát bụi thời gian lại phủ lấp mất ngôi mộ một lần nữa. Năm 1963, những người công nhân đã lại phát hiện được mộ chí của Archimedes trong khi họ động thổ để xây dựng khách sạn ở gần Syracuse.

Định lý nổi tiếng của Archimedes nói về hình cầu nội tiếp trong hình trụ đã được ông ghi lại trong cuốn "Phương pháp". Cũng giống như hầu hết các văn bản cổ, cuốn sách đó được ghi nhận là đã bị mất. Năm 1906, một học giả người Đan Mạch là J.L. Heiberg nghe tin ở Constantinople có bản thảo viết tay đã mờ trên giấy da các bài viết có nội dung toán học. Ông đã đến Constantinople và đã tìm được bản thảo đó gồm có 185 tờ giấy da. Các nghiên cứu khoa học đã xác định đó chính là bản sao cuốn sách của Archimedes được làm vào thế kỷ thứ X, rồi đến thế kỷ XIII những người theo đạo phương Đông chính thống đã bổ sung thêm vào đó.

Alexandria - phần Ai Cập thuộc Hy Lạp, khoảng năm 250

Nhà toán học Diophantus sống ở Alexandria vào khoảng năm 250. Mọi điều chúng ta biết được về cuộc đời Diophantus là dựa vào đoạn văn dưới đây trích dẫn từ tuyển tập Hợp tuyển Palatine. Tuyển tập này được viết vào khoảng một thế kỷ sau khi Diophantus mất [7].

"Đây là ngôi mộ chôn cất thi hài của Diophantus. Ngôi mộ này rất đặc biệt vì những con số dưới đây sẽ cho mọi người biết một phần cuộc đời ông :

Một phần sáu cuộc đời là tuổi ấu thơ hạnh phúc. Sau một phần mười hai tiếp theo của cuộc đời ông đã bắt đầu mọc lơ thơ những sợi ria. Phải trải qua một phần bảy cuộc đời nữa ông mới lấy vợ. Sau đó là năm năm đầy hạnh phúc và ông có một đứa con trai. Chao ôi, cậu bé thật đáng yêu song cũng thật bất hạnh. Khi cậu lớn lên và lúc tuổi cậu bằng nửa tuổi cha mình thì định mệnh lại lạnh lùng cướp cậu đi. Ông đã quên dần nỗi đau trong suốt bốn năm còn lại của cuộc đời mình. Di sản bằng những con số này đã kể cho ta hay về toàn bộ cuộc đời ông". (Nếu bạn làm một phép tính suy luận, bạn sẽ tìm được câu trả lời là 84).

Diophantus sống vào thời gian nào thì chưa ai khẳng định chắc chắn. Chúng ta chỉ có thể dựa vào hai chi tiết đáng chú ý để có thể xác định khoảng thời gian mà Diophantus sống. Thứ nhất, trong các bài viết của mình, ông đã trích dẫn Hypsicles, người mà chúng ta biết là đã sống vào khoảng năm 150 trước Công nguyên. Thứ hai, Theon (người xứ Alexandria) đã trích dẫn Diophantus. Thời gian Theon sống được ghi lại tường tận vì thời đó có hiện tượng nhật thực xảy ra vào ngày 16 tháng 6 năm 364. Vậy thì chắc chắn là Diophantus sống sau năm 150 trước Công nguyên nhưng trước năm 364. Và, có phần nào đó hơi tùy tiện, các học giả xếp ông vào giai đoạn những năm 250.

Diophantus đã viết cuốn *Số học*, trong đó ông phát triển các khái niệm đại số và đưa ra một lớp phương trình. Đó là các phương trình Diophantine ngày nay đang được dùng trong toán học. Ông đã viết mười lăm cuốn sách nhưng đến thời chúng ta chỉ còn lại có sáu cuốn. Những cuốn kia đã bị mất trong vụ hỏa hoạn thiêu hủy thư viện khổng lồ ở Alexandria, một thư viện có bộ sưu tập sách đồ sộ nhất vào thời kỳ Cổ Đại. Những cuốn còn lại nằm trong số các văn bản tiếng Hy Lạp cuối cùng đã được dịch. Bản dịch tiếng La tinh sớm nhất tìm thấy được xuất bản năm 1575. Còn bản sao mà Fermat có là bản do Claude Bachet dịch năm 1621. Đó là chương 8 trong cuốn II của Diophantus. Trong chương này Diophantus đặt vấn đề tìm cách phân tích một số chính phương thành tổng hai số chính phương. Đây cũng là vấn đề Pythagoras quan tâm và lời giải cho vấn đề này đã được người Babylon biết từ 2000 năm trước. Chính vấn đề này cũng đã gợi ý cho Fermat viết lên lề trang sách định lý cuối cùng nổi tiếng của mình. Các thành tựu toán học của Diophantus và những người cùng thời ông là niềm tự hào cuối cùng của người Hy Lạp cổ đại.

Truyện "Một nghìn một đêm lẻ"

Trong khi châu Âu đang đối phó với các cuộc chiến tranh phong kiến nhỏ giữa các nước chư hầu phong kiến của một ông vua hay một vị hoàng tử chống lại nhau, đang bận rộn vì sự sống còn sau nạn đại dịch hạch và cái gọi là cuộc thập tự chinh hao người tốn của thì người Ảrập lại đang cai trị một đế chế phồn thịnh từ vùng Trung Đông cho đến bán đảo Iberia. Cùng với những thành tựu vĩ đại của mình trong y học, thiên văn học và nghệ thuật, người Ảrập đã phát triển môn đại số. Năm 632, nhà tiên tri Mohammed thành lập một nhà nước Hồi giáo có thủ phủ tại Mecca, nơi cho đến nay vẫn là trung tâm tôn giáo của đạo Hồi. Ít lâu sau lực lượng của ông tấn công Vương quốc Byzantine và rồi cuộc chiến vẫn tiếp diễn sau cái chết của Mohammed ở Medina ngay năm đó. Trong vòng vài năm, Damascus, Jerusalem và phần lớn Mesopotamia đã thuộc về lực lượng của đạo Hồi, và đến năm 641, Alexandria - Trung tâm toán học của thế giới cũng vậy. Đến năm 750, các cuộc chiến tranh này cũng như các cuộc chiến giữa những người Hồi giáo với nhau đã lắng xuống, người Ảrập, nước Ma Rốc và vùng phía Tây đã phải hòa giải với người Ảrập vùng phía Đông có trung tâm ở Baghdad.

Baghdad trở thành trung tâm toán học. Người Ảrập tiếp thu từ dân cư ở những nơi mà họ thắng trận các ý tưởng toán học cũng như các phát minh trong thiên văn học và các ngành khoa học khác. Các học giả Iran, Syria, Alexandria được mời tới Baghdad. Dưới triều vua Al Mamun trong thời kỳ đầu của những năm 800, truyện "Một nghìn một đêm lẻ" đã ra đời và nhiều tác phẩm tiếng Hy Lạp - kể cả cuốn *Cơ sở* của Euclid - đã được dịch sang tiếng Ảrập. Nhà vua đã lập nên *Ngôi nhà tri thức* ở Baghdad và Mohammed Ibn Musa Al-Khowarizmi là một thành viên ở đó. Cũng như Euclid, Al-Khowarizmi là một người nổi tiếng khắp thế giới. Lấy các ý tưởng và ký hiệu các chữ số của người Hindu (Ấn Độ giáo) cùng với các khái niệm của người Mesopotamia và ý tưởng hình học của Euclid, Al-Khowarizmi đã viết sách về số học và đại số. Al-Khowarizmi là người đã đưa ra thuật ngữ "algorithm" (thuật toán). Còn thuật ngữ "algebra" (đại số) lại có nguồn gốc từ những từ đầu tiên trong đầu đề cuốn sách nổi tiếng nhất của Al-Khowarizmi: *Al Jabr Wa'l Muqabalah*. Chính nhờ cuốn sách này mà sau này châu Âu được biết đến một ngành toán học có tên gọi là đại số. Trong khi các ý tưởng đại số đã có trong cuốn *Arithmetica* (Số học) của Diophantus, thì *Al Jabr* có quan hệ gần gũi hơn với ngành đại số ngày nay. Cuốn sách của Al-Khowarizmi đưa ra các công thức đơn giản để giải các phương trình bậc nhất và bậc hai. Trong tiếng Ảrập, tên của cuốn sách này có nghĩa là "Thuật sắp xếp lại bằng cách chuyển về các số hạng trong một phương trình". Đó là cách ngày nay ta giải các phương trình bậc nhất.

Đại số và hình học có mối liên hệ với nhau giống như tất cả các lĩnh vực toán học khác. Trong thời đại chúng ta đã phát triển chuyên ngành hình học đại số - một chuyên ngành liên kết hai lĩnh vực toán học với nhau. Chính sự kết hợp các chuyên ngành toán học và sự liên kết của các phần trong các chuyên ngành khác nhau sau nhiều thế kỷ đã mở đường cho công trình giải bài toán Fermat của Wiles.

Một thương gia thời Trung Cổ và "Tỷ số vàng"

Người Ả-rập đã quan tâm tới bài toán có liên hệ mật thiết với vấn đề mà Diophantus đã nêu về việc tìm ra các bộ ba số Pythagoras. Đó là bài toán tìm bộ ba số Pythagoras khi biết diện tích của một tam giác vuông là một số nguyên cho trước. Hàng trăm năm sau, chính bài toán này đã trở thành cơ sở cho Leonardo (người xứ Pisa, 1180-1250) viết cuốn sách *Liber Quadratorum* vào năm 1225. Leonardo được biết đến nhiều hơn với tên gọi Fibonacci (nghĩa là "con trai của Bonaccio"). Fibonacci sinh ở Pisa. Ông là một thương gia quốc tế. Ông cũng đã từng sống ở Bắc Phi và Constantinople. Trong suốt cuộc đời mình, ông đã đi rất nhiều nơi, đã đến Provence, Sicily, Syria, Ai Cập và rất nhiều nơi khác ở vùng Địa Trung Hải. Những chuyến đi của ông và các quan hệ của ông với tinh hoa của xã hội thượng lưu Địa Trung Hải trong thời kỳ đó đã dẫn ông đến với các tư tưởng toán học của người Ả-rập, với nền văn hóa La Mã và Hy Lạp. Khi hoàng đế Frederick II đến Pisa, Fibonacci đã được giới thiệu với hoàng đế và trở thành một cận thần của hoàng đế.

Ngoài cuốn *Liber Quadratorum*, cũng trong thời gian đó, Fibonacci còn nổi tiếng với cuốn sách *Liber Abaci*. Vấn đề về các tam giác Pythagoras được đề cập trong cuốn sách của Fibonacci cũng xuất hiện trong một bản thảo của người Byzantine ở thế kỷ XI mà bây giờ đang nằm trong thư viện Cung điện cổ ở Istanbul. Điều này có thể là sự trùng hợp ngẫu nhiên; song mặt khác, cũng có thể Fibonacci đã thấy cuốn sách đó ở Constantinople trong các chuyến đi của ông.

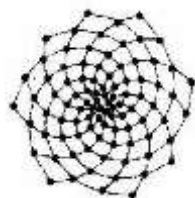
Fibonacci được biết đến nhiều nhất với dãy số mang tên ông - các số Fibonacci. Các số này xuất hiện trong bài toán dưới đây viết trong cuốn *Liber Abaci* :

Trong một năm, bắt đầu chỉ từ một đôi thỏ, bao nhiêu đôi thỏ sẽ được sinh ra nếu mỗi tháng một đôi thỏ sinh được một đôi thỏ con và cặp thỏ con này lại để được từ tháng thứ hai trở đi? Dãy số Fibonacci có nguồn gốc từ bài toán trên là một dãy sao cho mỗi số hạng, kể

từ sau số hạng thứ nhất, bằng tổng của hai số đứng ngay trước nó. Dãy số đó là: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

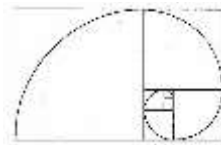
Dãy số trên (tức là dãy nhận được khi tiếp tục giải bài toán không dừng lại ở điều kiện 12 tháng) có những tính chất đặc biệt đáng chú ý. Thật vô cùng bất ngờ, tỷ số giữa hai số kế tiếp nhau của dãy đó tiến đến *Tỷ số vàng*. Các tỷ số đó là: $1/1$, $1/2$, $2/3$, $3/5$, $5/8$, $8/13$, $13/21$, $21/34$, $34/55$, $55/89$, $89/144$,... Cần chú ý rằng các số đó ngày càng tiến gần đến số (căn bậc hai của 5 - 1)/2. Đây chính là Tỷ số vàng. Ta cũng có thể nhận được Tỷ số vàng bằng cách dùng máy tính lặp lại nhiều lần phép toán $1/1 + 1/1 + 1/...$ như đã mô tả trước đây. Ta cũng nhớ lại rằng số nghịch đảo ($1/x$) của Tỷ số vàng là một số giống như nó chỉ có điều là bé hơn 1 đơn vị. Dãy số Fibonacci xuất hiện ở khắp nơi trong thiên nhiên. Những chiếc lá trên một nhánh cây mọc cách nhau những khoảng tương ứng với dãy số Fibonacci. Các số Fibonacci xuất hiện trong những bông hoa. Hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 hoặc 89. Hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến thường có 8 cánh, hoa cúc vạn thọ có 13 cánh, hoa cúc tây có 21 cánh, hoa cúc thường có 34, hoặc 55, hoặc 89 cánh.

Các số Fibonacci cũng xuất hiện trong các bông hoa hướng dương. Những nụ nhỏ sẽ kết thành hạt ở đầu bông hoa hướng dương được xếp thành hai tập các đường xoắn ốc: một tập cuộn theo chiều kim đồng hồ, còn tập kia cuộn ngược chiều kim đồng hồ. Số các đường xoắn ốc hướng thuận chiều kim đồng hồ thường là 34, còn ngược chiều kim đồng hồ là 55. Đôi khi các số này là 55 và 89, và thậm chí có khi là 89 và 144. Tất cả đều là các số Fibonacci kế tiếp nhau (tỷ số của chúng tiến tới Tỷ số vàng). Trong cuốn *Những con số của tự nhiên* Ian Stewart nói rằng, khi các đường xoắn ốc phát triển thì góc giữa chúng là 137,5 độ, tức là bằng 360 độ nhân với 1 trừ đi Tỷ số vàng, và chúng cũng tạo ra hai số Fibonacci kế tiếp nhau ứng với số đường xoắn ốc theo chiều kim đồng hồ và ngược chiều kim đồng hồ, như minh họa ở hình 7 [8].



Hình 7

Nếu một hình chữ nhật có tỷ lệ giữa hai cạnh là Tỷ số vàng thì có thể chia được thành một hình vuông và một hình chữ nhật. Hình chữ nhật thứ hai này là đồng dạng với hình chữ nhật lớn, vậy nên tỷ số giữa hai cạnh của nó cũng bằng Tỷ số vàng. Bây giờ, lại có thể chia hình chữ nhật bé thành một hình vuông và một hình chữ nhật, mà tỷ lệ giữa hai cạnh của hình chữ nhật cũng là Tỷ số vàng,... và cứ tiếp tục như vậy. Nối các đỉnh kế tiếp nhau của dãy hình chữ nhật với nhau ta nhận được một đường xoắn giống con ốc (hình 8), hết như sự xếp đặt các nụ nhỏ trong bông hoa hướng dương như mô tả ở trên và sự phân bố những chiếc lá trên một nhành cây.



Hình 8

Hình chữ nhật nêu trên có các tỷ lệ thật đáng chú ý. Tỷ số vàng không chỉ xuất hiện trong tự nhiên mà còn xuất hiện trong nghệ thuật như là lý tưởng cổ điển về cái đẹp. Có một điều gì đó thần kỳ bao quanh dãy số Fibonacci. Thực tế, hiện nay Hội Fibonacci đang hoạt động dưới sự lãnh đạo của một linh mục và có trung tâm ở Trường Đại học St. Mary tại California. Mục đích của Hội là tìm kiếm các ví dụ của Tỷ số vàng cũng như của các số Fibonacci trong tự nhiên, trong nghệ thuật và trong kiến trúc với niềm tin rằng Tỷ số vàng là món quà Thượng đế ban tặng cho thế giới này. Như là chuẩn mực của cái đẹp, Tỷ số vàng hiện diện ở nhiều nơi. Ở Điện Parthenon của thành Athens chẳng hạn, tỷ số giữa chiều cao và chiều dài của Điện Parthenon chính là Tỷ số vàng.

Kim tự tháp vĩ đại ở Giza được xây dựng từ nhiều trăm năm trước Điện Parthenon của Hy Lạp cũng có tỷ số giữa chiều cao của một mặt với một nửa cạnh đáy là Tỷ số vàng. Một bản viết trên giấy cỏ Rhind của người Ai Cập có nhắc tới Tỷ số thần thánh. Các pho tượng cổ cũng như các bức tranh thời kỳ Phục Hưng đều biểu hiện các tỷ lệ bằng Tỷ số vàng, một tỷ số thần thánh.



Điện Parthenon, Athens, Hy Lạp

Tỷ số vàng đã được tìm kiếm như là biểu tượng của vẻ đẹp vượt xa các loài hoa hay các công trình kiến trúc. Trong một bức thư gửi Hội Fibonacci vài năm trước đây, một thành viên đã miêu tả một người trong khi tìm kiếm Tỷ số vàng đã hỏi vài cặp vợ chồng để làm một cuộc thí nghiệm như thế nào. Ông ta yêu cầu người chồng đo chiều cao rốn của vợ rồi chia cho chiều cao của vợ. Ông khẳng định rằng đối với tất cả các cặp vợ chồng, tỷ số đó đều xấp xỉ bằng 0,618.

Các nhà "Cosa" học

Thời kỳ Trung Cổ, toán học thâm nhập châu Âu qua các công trình của Fibonacci và từ Tây Ban Nha (khi đó là một phần của thế giới Ả Rập) với công trình của Al-Khowarizmi. Thời kỳ đó, mục đích chính của đại số là giải các phương trình để tìm đại lượng chưa biết. Ngày nay, chúng ta gọi đại lượng chưa biết là "x" và cố gắng giải phương trình để tìm tất cả các giá trị mà "x" có thể nhận. Ví dụ, một phương trình đơn giản nhất là: $x - 5 = 0$. Bây giờ ta sẽ sử dụng các tính toán toán học đơn giản để tìm giá trị của "x". Nếu ta thêm 5 vào cả hai vế của phương trình thì vế trái là $x - 5 + 5$, còn vế phải là $0 + 5$. Và vì vậy vế trái là "x" còn vế phải là 5, tức là $x = 5$. Vào thời Al-Khowarizmi, người Ả Rập gọi đại lượng chưa biết là "một vật" (thing). Trong tiếng Ả Rập từ "một vật" là "shai". Vậy là họ giải các phương trình nhằm tìm "shai" chưa biết, như đã làm trên đây với "x". Khi các ý tưởng này thâm nhập vào châu Âu, thuật ngữ tiếng Ả Rập "shai" được dịch qua tiếng La tinh. Từ "một vật" là "res" trong tiếng La tinh và là "cosa" trong tiếng Italia. Vì các nhà đại số châu Âu đầu tiên là người Italia nên từ cosa đã gắn liền với họ. Và cũng vì họ quan tâm đến việc giải các phương trình để tìm "cosa" chưa biết, những người này được gọi tên là Cossists (các nhà "Cosa học") [\[9\]](#).

Trong thời kỳ Trung Cổ và buổi đầu thời kỳ Phục Hưng, cũng giống như ở Babylon 3500 năm trước, toán học đã được sử dụng với mục đích thương mại là chính. Giới thương nhân thời đó ngày càng quan tâm tới các vấn đề về thương mại, về tỷ lệ trao đổi, về lãi suất, về giá cả, và đôi khi những vấn đề này phải giải quyết như là các bài toán đòi hỏi phương pháp giải

phương trình. Các nhà Cosa học như Luca Pacioli (1445- 1514), Geronimo Cardano (1501-1576), Niccolo Tartaglia (1500-1557) và những người khác đã cạnh tranh nhau trong việc phục vụ các nhà buôn và các thương gia giải các bài toán. Các nhà toán học đó đã dùng phương pháp giải các bài toán trừu tượng hơn để quảng cáo. Do phải cạnh tranh để có được khách hàng, họ đã dành nhiều thời gian và sự cố gắng để giải các bài toán khó hơn, chẳng hạn như các phương trình bậc ba (tức là các phương trình mà đại lượng "cosa" chưa biết, hay như ngôn từ của ta ngày nay gọi là "x", ở dạng lũy thừa bậc ba, x^3) - để họ có thể xuất bản các kết quả và thường xuyên được đón mời giải quyết các bài toán ứng dụng.

Vào thời kỳ đầu thế kỷ XVI, Tartaglia đã tìm được phương pháp giải phương trình bậc ba. Ông giữ kín phương pháp này để duy trì lợi thế hơn các đối thủ của ông trên thị trường giải các bài toán đầy lợi nhuận. Sau khi Tartaglia thắng thế một nhà toán học khác trong cuộc cạnh tranh giải các bài toán, Cardano đã ép ông tiết lộ phương pháp giải các phương trình bậc ba. Tartaglia đã tiết lộ phương pháp của mình với điều kiện Cardano không được để lộ cho bất kỳ ai. Sau này, khi mà Cardano biết được các phương pháp tương tự của nhà Cosa học khác là Scippione del Ferro (1456-1526), Cardano tức thì cho rằng Tartaglia đã có được phương pháp giải các phương trình bậc ba từ Ferro và Cardano cảm thấy được tự do tiết lộ bí mật đó. Sau đấy, Cardano đã cho in ấn phương pháp giải các phương trình bậc ba trong cuốn "Ars Magna" của ông vào năm 1545. Tartaglia cảm thấy bị phản bội và rất căm giận Cardano. Trong những năm cuối đời, Tartaglia đã mất rất nhiều thì giờ cho việc gièm pha người bạn cũ của mình và ông đã thành công trong việc hạ thấp thanh danh của Cardano.

Người ta nhìn nhận các nhà Cosa học là những nhà toán học có trình độ thấp hơn người Hy Lạp cổ đại. Họ bận tâm với các bài toán ứng dụng nhằm mưu cầu tiền bạc. Những cuộc đấu đá trong nội bộ các nhà Cosa học không có tính xây dựng và điều đó đã tách rời họ khỏi việc tìm kiếm cái đẹp trong toán học cũng như sự tìm tòi hiểu biết theo đúng nghĩa của nó. Họ không hề phát triển được một lý thuyết trừu tượng, tổng quát nào cho toán học. Vì thế người ta cần phải quay trở lại với người Hy Lạp cổ đại. Điều này thực sự đã xảy ra một thế kỷ sau đó.

Công cuộc tìm kiếm tri thức cổ trong thời kỳ Phục Hưng

1300 năm đã trôi qua kể từ thời đại của Diophantus. Thế giới đã chuyển từ thời kỳ Trung Cổ sang thời kỳ Phục Hưng và một thời đại mới bắt đầu. Thoát khỏi bóng đêm thời Trung Cổ, châu Âu đã bừng tỉnh cùng với lòng khát khao hiểu biết. Rất nhiều người lại quan tâm đến các tác phẩm kinh điển của những người cổ đại. Trong quá trình làm sống lại công việc

ngiên cứu tìm tòi hiểu biết và khai sáng ấy, tất cả các cuốn sách cổ còn lại đều được dịch sang tiếng La tinh - ngôn ngữ của những người có học. Dịch giả Claude Bachet - một quý tộc Pháp - rất quan tâm đến toán học. Ông có được một cuốn "*Arithmetica*" tiếng Hy Lạp của Diophantus. Ông đã dịch và xuất bản cuốn sách này (tại Paris, năm 1621) dưới cái tên "*Diophanti Alexandrini Arithmeticonum Libri Sex*". Cuốn sách này đã đến với Fermat.

Định lý cuối cùng của Fermat có nội dung thực chất là: Không thể có một bộ ba số Pythagoras đối với bất kỳ một lũy thừa nào lớn hơn 2. Không tồn tại một bộ ba số nào sao cho tổng hai số bằng số thứ ba - trong đó mỗi số là lập phương, hoặc là lũy thừa bậc bốn, bậc năm, bậc sáu, hay bất kỳ một lũy thừa nào khác của một số nguyên nào đó. Làm thế nào mà Fermat đưa ra được định lý này?

Bình phương, lập phương và các lũy thừa bậc cao hơn

Định lý là một mệnh đề cùng với phép chứng minh. Fermat khẳng định đã có "một chứng minh tuyệt vời", nhưng nếu không được nhìn thấy và đánh giá tính đúng đắn của phép chứng minh thì không ai có thể gọi mệnh đề của ông là một định lý. Một mệnh đề có thể là rất sâu sắc, rất có ý nghĩa và rất quan trọng, nhưng nếu không chứng tỏ được nó thực sự đúng thì chỉ có thể gọi đó là một điều phỏng đoán hay là một giả thuyết. Một khi điều phỏng đoán được chứng minh thì mới được gọi là "định lý", hoặc là một "bổ đề" nếu đó là một mệnh đề mở đầu và được chứng minh để rồi dẫn đến một định lý sâu sắc hơn. Các kết luận suy ra từ một định lý và được chứng minh thì được gọi là các hệ quả. Chính Fermat đã có một số mệnh đề như thế. Một mệnh đề trong số đó là: Các số dạng $2^{(2 \text{ lũy thừa } n)} + 1$ luôn là số nguyên tố. Phỏng đoán này chưa được chứng minh, do đó không phải là một định lý. Thực tế, ở thế kỷ sau, nhà toán học vĩ đại người Thụy Sĩ Leonhard Euler (1707-1783) đã chỉ ra đó là một phỏng đoán sai. Vậy thì cũng chưa có lý do để tin rằng "Định lý cuối cùng" là đúng. Nó có thể đúng, hoặc có thể sai. Để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat là sai, tất cả những gì phải làm là tìm được một bộ ba số nguyên a, b, c và một lũy thừa n lớn hơn 2 thỏa mãn quan hệ $a^n + b^n = c^n$. Chưa người nào tìm được một tập các số nguyên như vậy. (Tuy vậy, việc giả định là có một tập các số nguyên như thế sau này chính là yếu tố quan trọng cho các cố gắng tiếp tục chứng minh Định lý). Vào những năm 1990, người ta đã chỉ ra rằng không tồn tại các số nguyên như thế đối với mọi lũy thừa n nhỏ hơn bốn triệu. Nhưng điều này không có nghĩa là sẽ không bao giờ tìm được các số nguyên như vậy. Định lý phải được kiểm chứng với tất cả các số nguyên và tất cả các lũy thừa có thể có.

Chính Fermat đã chứng minh định lý cuối cùng của ông với $n=4$. Ông đã sử dụng một phương pháp tài tình mà ông gọi là phương pháp "giảm vô hạn" để chỉ ra rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^4 + b^4 = c^4$. Ông cũng nhận thấy rằng, nếu có lời giải với một lũy thừa n nào đó thì cũng có lời giải với mọi bội số của n . Do đó ta chỉ phải xét các lũy thừa là các số nguyên tố (lớn hơn 2), tức là các số không thể chia hết cho bất kỳ số nguyên nào khác 1 và chính nó. Một vài số nguyên tố đầu tiên là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,... Không một số nào trong chúng chia được cho bất kỳ một số nào khác 1 và chính nó mà cho kết quả là một số nguyên. Ví dụ, số 6 không phải số nguyên tố vì 6 chia cho 3 bằng 2 - một số nguyên. Fermat cũng đã chứng minh định lý cuối cùng của ông với $n=3$. Độc lập với Fermat, Leonhard Euler đã chứng minh cho trường hợp $n=3$ và $n=4$, còn Peter G. L. Dirichlet đã có thể chứng minh cho trường hợp $n=5$ vào năm 1828. Các trường hợp đó cũng đã được Adrien-Marie Legendre chứng minh vào năm 1830. Gabriel Lamé đã chứng minh cho trường hợp $n=7$ và chứng minh này được Henri Lebesgue hiệu đính vào năm 1840. Vậy là sau 200 năm kể từ khi Fermat viết những dòng ghi chú nổi tiếng trên lề cuốn sách của Diophantus mà ông có, định lý của ông mới chỉ được chứng minh là đúng với các lũy thừa 3, 4, 5, 6 và 7. Để chứng minh định lý với mọi lũy thừa n con đường đi còn dài vô cùng. Rõ ràng là phải có một phép chứng minh tổng quát đối với tất cả các lũy thừa, cho dù các lũy thừa đó lớn thế nào đi nữa. Các nhà toán học đều đi tìm cái phép chứng minh tổng quát duy nhất ấy, nhưng thật đáng tiếc, những gì họ đạt được mới chỉ là các chứng minh với một số lũy thừa đặc biệt.

Người nghiên cứu thuật toán

Người nghiên cứu thuật toán là người đặt ra các phương pháp tính toán hay thuật toán. Nhà toán học danh tiếng người Thụy Sĩ Leonhard Euler chính là một nhà nghiên cứu thuật toán. Người ta nói rằng ông có khả năng tính toán một cách tự nhiên như người ta thở vậy. Nhưng Euler còn hơn cả một máy tính biết đi. Ông là nhà khoa học Thụy Sĩ có kết quả nghiên cứu phong phú nhất của mọi thời đại và một nhà toán học viết nhiều tuyển tập nghiên cứu đến nỗi Chính phủ Thụy Sĩ đã lập một ngân sách riêng dành để sưu tập tất cả các tác phẩm của ông. Người ta nói rằng ông có thể hoàn thành những bài báo toán học chỉ trong khoảng thời gian giữa hai lần gọi dùng bữa tối của đại gia đình ông.

Leonhard Euler sinh ngày 15 tháng 4 năm 1707 tại Basel. Ngay năm sau đó (1708), gia đình ông chuyển đến làng Riehen, nơi mà cha ông đã trở thành mục sư phái Calvin. Khi chàng Leonhard trẻ tuổi đi học, cha ông đã khuyến khích ông theo đuổi nghiên cứu thần học để rồi ông sẽ giành lấy chức mục sư của làng. Nhưng Euler tỏ ra có nhiều hứa hẹn về toán học và ông đã được Johannes Bernoulli - một nhà toán học Thụy Sĩ nổi tiếng thời bấy giờ - kèm

cặp. Daniel và Nicolaus Bernoulli - hai thành viên trẻ tuổi của đại gia đình toán học Bernoulli - đã trở thành bạn thân của ông. Hai người bạn này đã thuyết phục cha mẹ Leonhard cho phép ông đi theo ngành toán học vì chắc rằng ông sẽ trở thành một nhà toán học vĩ đại. Tuy nhiên, ngoài toán học, Leonhard vẫn tiếp tục nghiên cứu thần học và những cảm xúc cũng như các tập tục tôn giáo sẽ là một phần trong cuộc đời ông.

Thời bấy giờ ở châu Âu việc nghiên cứu toán học cũng như khoa học không được tiến hành chủ yếu tại các trường đại học tổng hợp như bây giờ. Các trường đại học tổng hợp chú trọng việc giảng dạy nhiều hơn và không để nhiều thời giờ cho các hoạt động khác. Ở thế kỷ XVIII công việc nghiên cứu chủ yếu được thực hiện tại các viện hàn lâm khoa học hoàng gia. Tại đó, nhà vua chu cấp cho các nhà khoa học đầu đàn trong việc theo đuổi tìm tòi hiểu biết. Một số tri thức đã được ứng dụng giúp vương triều nâng cao địa vị của dân tộc. Có những nghiên cứu nghiêng về lý thuyết hơn, tức là, các nghiên cứu vì mục đích nâng cao tri thức của loài người. Hoàng tộc tài trợ rất hào phóng cho công tác nghiên cứu đó và các nhà khoa học làm việc trong viện hàn lâm được hưởng một cuộc sống phong lưu.

Khi Euler kết thúc các khóa nghiên cứu toán học cũng như thần học và tiếng Do Thái tại Trường Đại học Tổng hợp Basel, ông đã đệ đơn xin một chức giáo sư nhưng bị từ chối mặc dù ông đã đạt được nhiều thành tựu lớn. Trong khi đó, Daniel và Nicolaus - hai người bạn của ông - đã được nhận làm những nhà nghiên cứu toán học tại Viện Hàn lâm khoa học hoàng gia St. Petersburg của nước Nga. Họ vẫn giữ liên lạc với Leonhard và hứa bằng mọi cách sẽ xin cho ông vào đó. Thế rồi một hôm, hai anh em nhà Bernoulli gửi thư khẩn cho Euler thông báo có một chỗ trống tại Phân viện Y học trong Viện Hàn lâm khoa học hoàng gia St. Petersburg. Euler lập tức lao vào nghiên cứu sinh lý học và y học tại Basel. Ông chẳng thích thú gì y học, song ông không có cách nào khác để kiếm việc làm. Ông hy vọng rằng bằng cách này ông sẽ đến được với hai người bạn của mình - những người có vị trí thật tuyệt vời ở nước Nga: chẳng phải làm gì khác ngoài công việc nghiên cứu.

Euler nhận thấy toán học hiện diện ở bất cứ lĩnh vực nào mà ông nghiên cứu, kể cả trong y học. Việc nghiên cứu sinh lý học về tai đã dẫn dắt ông đến với phân tích toán học của quá trình truyền sóng. Dù sao đi nữa, chẳng bao lâu sau, Euler đã nhận được lời mời đến St. Petersburg và ông đã gặp lại hai người bạn của mình vào năm 1727. Tuy nhiên, khi hoàng hậu Catherine của Peter đại đế qua đời, trong Viện Hàn lâm đã xảy ra xáo trộn vì bà Catherine đã từng là nhà tài trợ lớn cho công việc nghiên cứu. Trong tình trạng lộn xộn ấy, Leonhard Euler đã biến mất khỏi Phân viện Y học, và bằng cách nào đó ông đã có tên trong danh sách của Phân viện Toán học, nơi mới đích thực là chỗ phù hợp với ông. Suốt sáu năm trời, ông luôn cúi mặt để tránh bị phát hiện đã đổi chỗ, cũng như tránh xa mọi quan hệ xã hội để khỏi lộ ra trò gian dối của mình. Ông miệt mài làm việc suốt cả thời gian đó để cho ra đời những công trình toán học xuất chúng. Năm 1733 ông trở thành một nhà toán học có vị

trí hàng đầu tại Viện Hàn lâm khoa học. Rõ ràng Euler là một người có thể làm việc ở bất cứ chỗ nào. Khi đã có con, ông thường làm toán trong khi một tay đang ẵm con.

Đến khi Anna Ivanova, cháu gái dòng tộc Peter đại đế, trở thành Nữ hoàng Nga thì một thời kỳ kinh hoàng đã bắt đầu. Euler lại một lần nữa giấu mình để làm công việc nghiên cứu suốt mười năm trời. Trong thời gian này Euler tiến hành giải quyết một vấn đề hóc búa trong thiên văn học đang được treo giải thưởng tại Paris. Một số nhà toán học đã xin nghỉ công việc tại Viện Hàn lâm vài tháng để giải quyết vấn đề này. Euler đã giải quyết xong vấn đề đó trong ba ngày. Nhưng sự tập trung nỗ lực quá sức đã phải trả giá bằng việc ông bị mù mắt phải.

Euler đã chuyển đến Viện Hàn lâm khoa học hoàng gia Đức nhưng ông không hòa hợp được với người Đức. Ông không thích những cuộc tranh luận triết học triền miên của họ. Nữ hoàng Catherine của nước Nga lại mời Euler quay về Viện Hàn lâm khoa học hoàng gia St. Petersburg và ông đã trở về đó trong tâm trạng vô cùng phấn khởi. Khi đó, nhà triết học Denis Diderot, một người theo thuyết vô thần, đang viếng thăm Nữ hoàng Catherine. Nữ hoàng đã yêu cầu Euler tranh luận với Diderot về sự tồn tại của Chúa. Khi đó người ta cho Diderot hay rằng nhà toán học nổi tiếng đã có cách chứng minh sự tồn tại của Chúa. Euler tiến lại gần Diderot rồi trang trọng nói: "Thưa ngài, $a + b/n = x$, Chúa đã tồn tại vì thế đấy - đó là câu trả lời!". Diderot, một người chẳng hiểu biết tý gì về toán học, đành chịu thua rồi lập tức trở về Pháp.

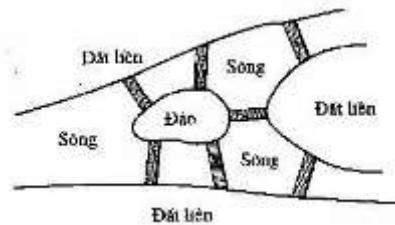
Trong thời gian lưu lại ở Nga lần thứ hai, Euler lại bị mù nốt con mắt còn lại Tuy vậy, ông vẫn tiếp tục làm toán với sự giúp đỡ của các con trai mình. Chúng làm các công việc viết lách cho ông. Bệnh mù lòa đã làm tăng thêm năng lực trí não của ông để thực hiện các phép tính phức tạp ngay trong đầu mình. Euler tiếp tục làm toán thêm mười bảy năm nữa. Ông mất năm 1783 trong khi đang chơi đùa với cháu trai của mình. Rất nhiều ký hiệu toán học mà hiện nay chúng ta đang sử dụng là của Euler, trong đó có việc sử dụng chữ i làm ký hiệu đơn vị số ảo, tức là căn bậc hai của -1 . Euler rất thích một công thức toán học mà theo ông là đẹp nhất. Ông đã khắc công thức này lên trên các cổng của Viện hàn lâm khoa học. Công thức đó là:

$$e^{i(\pi)} + 1 = 0$$

Công thức này chứa số 1 và số 0 - những số cơ sở trong hệ đếm của chúng ta; nó gồm ba phép toán: phép cộng, phép nhân và phép lũy thừa; nó chứa hai số vô tỷ điển hình là số π và số e ; và nó chứa i - cơ sở của số ảo. Công thức này nhìn cũng rất là cuốn hút.

Bảy cây cầu của thành phố Königsberg Euler có trí tưởng tượng toán học quả là phi thường. Công trình tiên phong về các số ảo (mà ngày nay ta gọi là giải tích phức) không phải là sáng kiến duy nhất của ông. Ông còn đi đầu trong việc nghiên cứu một lĩnh vực mới mà ngày nay đã trở nên tối cần thiết trong công việc của các nhà toán học, cũng như trong các cố gắng nhằm khám phá bí mật Định lý cuối cùng của Fermat. Lĩnh vực đó là tô pô học, một lý thuyết trực giác về các hình thể không gian không thay đổi tính chất khi bị biến đổi bởi các hàm số liên tục. Tô pô học nghiên cứu các hình và các dạng của chúng. Đó là môn hình học mới lạ và khó hiểu, được áp dụng cho các không gian 4, 5 và nhiều chiều ngoài phạm vi của không gian thực ba chiều. Ta sẽ trở lại lĩnh vực hấp dẫn này một lần nữa khi đề cập đến phương pháp hiện đại tiếp cận bài toán Fermat vì tô pô học tưởng như chẳng có liên quan gì với phương trình Fermat song lại có tầm quan trọng lớn giúp ta hiểu bài toán này.

Trở lại quá trình hình thành tô pô học, đóng góp của Euler cho lĩnh vực này là bài toán nổi tiếng về bảy chiếc cầu ở thành phố Königsberg. Đó là một trò chơi thách đố đã làm nảy sinh toàn bộ sự say mê môn tô pô học. Vào thời Euler, có bảy chiếc cầu bắc qua sông Pregel thuộc thành phố Königsberg. Dưới đây là sơ đồ mô tả vị trí bảy chiếc cầu đó (hình 9).



Hình 9

Euler đặt vấn đề có cách nào để có thể đi qua cả bảy chiếc cầu mà không phải đi qua bất kỳ cây cầu nào hai lần hay không. Không thể thực hiện được điều đó! Một bài toán khác là bài toán tô màu các bản đồ. Các bài toán này đã được nghiên cứu trong thời kỳ hiện đại và chúng đã được đặt ra vì tính hấp dẫn của bài toán bảy cây cầu. Một người vẽ bản đồ chuyên nghiệp vẽ một tấm bản đồ thế giới. Trên tấm bản đồ này, anh ta tô mỗi nước một màu khác nhau để phân biệt nước này với các nước láng giềng cận kề. Bất cứ hai nước nào mà hoàn toàn không có biên giới chung thì có thể tô cùng một màu. Vấn đề đặt ra là cần tối thiểu bao nhiêu màu tất cả để trên toàn bộ tấm bản đồ hai quốc gia sát cạnh nhau không tô cùng một

màu? Tất nhiên, đây là một bài toán tổng quát, không lệ thuộc vào bản đồ thế giới ngày nay như thế nào. Vấn đề đặt ra là: cho dù các nước trên bản đồ có phức tạp đến đâu đi nữa thì số màu tối thiểu cần sử dụng là bao nhiêu? Các đường biên giới giữa các bang thuộc Nam Tư cũ hoặc thuộc vùng Trung Đông được cho trước cùng với rất nhiều đường ranh giới đặc biệt giữa các thực thể chính trị làm cho bài toán tổng quát trở nên thích hợp trong các ứng dụng.

Xét về mặt toán học thì đây là bài toán tô pô. Tháng 10 năm 1852, Francis Guthrie trong khi tô bản đồ Anh quốc đã tự hỏi số màu tối thiểu cần dùng để tô tất cả các quận là bao nhiêu. Kết quả số màu ông cần là bốn. Vào năm 1879 người ta đã chứng minh rằng số màu cần dùng đúng là bốn, nhưng sau đó phát hiện ra rằng chứng minh này sai. Gần một thế kỷ sau, năm 1976, hai nhà toán học Haken và Appel đã giải được Bài toán bản đồ bốn màu nổi tiếng. Tuy nhiên, hiện nay người ta cho rằng cách giải quyết của họ còn phải bàn luận vì phép chứng minh đã sử dụng khả năng của máy tính nhiều hơn là sử dụng logic toán học lý thuyết.

Gauss - thiên tài vĩ đại người Đức

Có một lỗi trong phép chứng minh của Euler với $n=3$ (tức là lũy thừa 3) đã được Carl Friedrich Gauss (1777-1855) đính chính. Trong khi hầu hết các nhà toán học nổi tiếng thời đó là người Pháp, thì Gauss, nhà toán học vĩ đại nhất thời bấy giờ - và còn có thể là của mọi thời đại, là một người Đức chính cống. Thực tế, ông chưa bao giờ rời nước Đức để đi thăm viếng một nước nào. Gauss là cháu trai của một nông dân rất nghèo và là con trai của một người lao động ở Brunswick. Người cha rất ác nghiệt với ông, nhưng người mẹ đã che chở và động viên con trai mình. Cậu bé Carl cũng nhận được sự chăm nom của người bác Friedrich - anh trai của mẹ ông, bà Dorothea. Người bác giàu hơn bố mẹ Carl và là người có tiếng tăm trong ngành dệt. Một lần, khi mới ba tuổi, Carl quan sát bác mình cộng các bản kê tiền nong trong quyển sổ tổng hợp. "Bác Friedrich", cậu bé thốt lên, "phép tính này sai rồi". Người bác hết sức sửng sốt. Từ hôm ấy trở đi, người bác đã làm mọi điều có thể giúp đỡ cho việc học hành và nuôi dưỡng cậu bé thiên tài. Mặc dù ở trường Gauss tỏ ra có triển vọng lạ thường, nhưng đôi khi thái độ của cậu vẫn còn cần phải uốn nắn. Một hôm, trong khi các bạn khác được ra ngoài chơi, thầy giáo phạt cậu phải ở lại trong lớp cho đến khi nào cộng hết các số từ 1 đến 100. Hai phút sau, cậu bé Gauss mười tuổi đã chạy ra ngoài nô nghịch với các bạn cùng lớp. Thầy giáo rất bức. "Carl Friedrich!", ông gọi, "em muốn bị phạt nặng hơn phải không? Tôi bảo em ở trong lớp đến khi nào em cộng xong các số từ 1 đến 100 cơ mà!". - "Nhưng em cộng xong rồi", cậu nói, - "đây là đáp số ạ". Gauss đưa cho thầy giáo tờ

giấy đã viết kết quả đúng trên đó: 5050. Rõ ràng Gauss đã biết cách viết hai dòng 101 con số:

0 1 2 3 97 98 99 100

100 99 98 97 3 2 1 0

Cậu nhận thấy là tổng của mỗi cột bằng 100, vậy thì phép cộng chẳng có gì là khó khăn cả. Vì có 101 cột nên tổng tất cả các số là $101 \times 100 = 10100$. Còn bây giờ bất kỳ dòng nào trong hai dòng trên cũng có tổng mà cậu cần, tức là tổng của tất cả các số từ 1 đến 100. Song cậu chỉ cần một trong hai dòng nên đáp số chính là một nửa của 10100 hay là 5050. Quá đơn giản, cậu nghĩ thế. Dù sao, thầy giáo cũng được một bài học và không bao giờ lại ấn định hình phạt cậu bé Gauss bằng một bài toán nữa.

Năm mười lăm tuổi, nhờ sự giúp đỡ của ngài công tước xứ Brunswick, Gauss vào trường đại học ở Brunswick. Sau đó ngài công tước lại hỗ trợ nhà toán học trẻ tuổi theo học tiếp ở trường đại học danh tiếng ở Gottingen. Tại đây, ngày 30 tháng 3 năm 1796 Gauss đã viết trang đầu tiên trong cuốn nhật ký nổi tiếng của ông. Cuốn nhật ký này chỉ có mười chín trang, nhưng trong những trang này Gauss đã ghi 146 mệnh đề tóm tắt lại các kết quả toán học quan trọng và rất có ý nghĩa mà ông tìm ra. Sau này người ta phát hiện ra rằng hầu hết mọi ý tưởng toán học quan trọng mà bất kỳ nhà toán học nào công bố vào những năm cuối thế kỷ XVIII và trong thế kỷ XIX đều đã được nêu ra trước đó trong số danh mục mệnh đề ở cuốn nhật ký chưa xuất bản của Gauss. Cuốn nhật ký này nằm kín một chỗ cho đến tận năm 1898 người ta mới tìm thấy nó trong gia sản của người cháu trai của Gauss ở Hamlin.

Các kết quả trong lý thuyết số của Gauss trước đây đã được chia sẻ với các nhà toán học cùng thời đó qua trao đổi thư từ thường xuyên và chúng có tầm quan trọng rất lớn hỗ trợ sự cố gắng của các nhà toán học nhằm chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Rất nhiều kết quả trong số đó đã được đưa vào cuốn sách về lý thuyết số mà Gauss công bố bằng tiếng Latinh năm 1801 - khi ông 24 tuổi. Cuốn sách này có tên là "*Disquisitiones Arithmeticae*" và đã được dịch sang tiếng Pháp, xuất bản ở Paris năm 1807 và rất được chú ý. Người ta đánh giá đây là cuốn sách của một thiên tài. Gauss đã để tặng cuốn sách này cho người bảo trợ của mình - Ngài công tước xứ Brunswick.

Gauss là một học giả lỗi lạc cả về ngôn ngữ cổ điển. Khi vào trường đại học, ông đã thông thạo tiếng Latinh và mối quan tâm của ông đến ngôn ngữ học đã dẫn đến sự khủng hoảng trong sự nghiệp của ông. Ông cần theo đuổi việc nghiên cứu ngôn ngữ hay toán học đây ? Bước quyết định đã xảy ra vào ngày 30 tháng 3 năm 1796. Từ cuốn nhật ký của ông, chúng ta biết được rằng hôm ấy ông đã quyết định dứt khoát sẽ theo ngành toán. Ông đã có đóng góp vào rất nhiều ngành khác nhau trong toán học và thống kê học (một lĩnh vực mà ông được xem là người đã tìm ra phương pháp bình phương tối thiểu rất tài tình, nhờ nó người ta có thể tìm ra một phương án thích hợp với một tập dữ liệu), nhưng ông cho rằng lý thuyết số mới là cốt lõi của toàn bộ các ngành toán học.

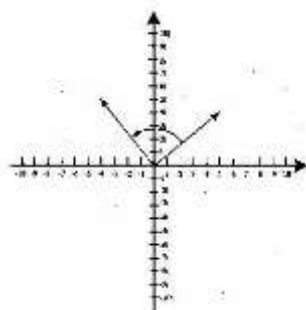
Nhưng tại sao thiên tài toán học vĩ đại nhất thế giới lại không bao giờ thử chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat? H.W.M. Olbers, bạn của Gauss, đã viết cho ông một bức thư từ Bremen ngày 7 tháng 3 năm 1816, trong đó ông nói với Gauss rằng Viện Hàn lâm khoa học Paris treo một giải thưởng lớn cho bất cứ ai đưa ra chứng minh hoặc phản chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Người bạn đã gợi ý là Gauss chắc sẽ có cách giải để nhận được số tiền này. Thời gian đó cũng như suốt quá trình theo đuổi sự nghiệp toán học của mình, Gauss đã nhận nguồn trợ cấp tài chính từ ngài công tước xứ Brunswick. Điều này cho phép ông làm toán mà không cần làm thêm việc gì nữa. Nhưng còn lâu ông mới giàu được. Và, như Olbers nhận định, không một nhà toán học nào có tài và năng lực như ông. "Một điều mà theo tôi dường như đúng, Gauss thân mến, là anh sẽ quan tâm và bận rộn nhiều về vấn đề này", - Olbers kết luận.

Nhưng Gauss đã không bị cám dỗ. Có lẽ ông biết Định lý cuối cùng của Fermat thật dễ làm người ta ngộ nhận làm sao. Nhà thiên tài lỗi lạc về lý thuyết số này có thể là nhà toán học duy nhất của châu Âu đã nhận thức rõ ràng được rằng việc chứng minh định lý đó thực sự khó khăn như thế nào. Hai tuần sau, Gauss đã viết thư cho Olbers nói quan điểm của ông về Định lý cuối cùng của Fermat: "Tôi vô cùng cảm ơn anh đã cho biết tin tức về giải thưởng của Paris. Nhưng tôi thú nhận rằng Định lý cuối cùng của Fermat là một mệnh đề biệt lập gây rất ít hứng thú cho tôi bởi vì tôi có thể đưa ra vô vàn mệnh đề như thế, những mệnh đề mà người ta không thể chứng minh hoặc bác bỏ". Trong khi đó, Gauss đã có những đóng góp lớn lao cho Giải tích phức - một ngành toán học gắn liền với số ảo mà Euler đề xướng. Số ảo có vai trò quyết định nhận thức của thế kỷ XX về trường hợp Định lý cuối cùng của Fermat.

Số ảo

Trường số phức là một trường số dựa trên các số thực thông thường và cái được gọi là các số ảo do Euler đưa ra. Số ảo xuất hiện trong khi các nhà toán học tìm cách định nghĩa "cái gì đấy" giống như số, là nghiệm số của phương trình dạng $x^2 + 1 = 0$. Phương trình đơn giản này không có nghiệm số thực, vì không có số thực nào mà bình phương bằng (-1) (là số mà cộng với 1 sẽ cho kết quả là 0). Nhưng nếu bằng cách nào đấy chúng ta có thể định nghĩa căn bậc hai của (-1) là một số thì số này - không phải là một số thực - sẽ là nghiệm của phương trình trên.

Do đó, trục số đã được mở rộng để chứa cả số ảo nữa. Mỗi số ảo là một bội số của căn bậc hai của (-1) , biểu thị bằng chữ i . Số ảo được biểu thị trên một trục số riêng, vuông góc với trục số thực. Đồng thời, hai trục số này cho ta mặt phẳng phức. Mặt phẳng phức được minh họa ở hình 10. Nó có rất nhiều tính chất đáng ngạc nhiên, chẳng hạn bản chất phép quay là bội số của i .



Hình 10

Mặt phẳng phức là trường số nhỏ nhất chứa các nghiệm của tất cả các phương trình bậc hai. Người ta đã nhận thấy trường số phức rất có lợi, ngay cả đối với các ứng dụng trong kỹ thuật, cơ học chất lỏng và nhiều lĩnh vực khác. Năm 1811, đi trước thời đại hàng chục năm, Gauss đã tiến hành nghiên cứu đáng chú ý của các hàm số trên mặt phẳng phức. Ông đã phát hiện một số tính chất rất đáng ngạc nhiên của các hàm số này, những hàm số được gọi là các hàm giải tích. Gauss nhận thấy rằng các hàm giải tích có tính trơn đặc biệt, chúng cho phép thực hiện các tính toán đặc biệt chính xác. Các hàm giải tích bảo toàn góc giữa các đường thẳng và các cung trên mặt phẳng phức - một khía cạnh rất được quan tâm trong thế kỷ XX. Một số hàm giải tích, được gọi là các dạng modula, có vai trò quyết định trong các phương pháp mới tiếp cận bài toán Fermat.

Do đức tính khiêm tốn của mình, Gauss đã không xuất bản các kết quả nghiên cứu quan trọng nêu trên. Ông viết các kết quả này trong một bức thư gửi cho người bạn của ông là Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). Nhiều năm sau, khi lý thuyết này xuất hiện trở lại nhưng không gắn với tên của Gauss, các nhà toán học khác đã được công nhận là tác giả của chính công trình nghiên cứu về các hàm giải tích mà Gauss đã nắm rất tường tận trước đó.

Sophie Germain

Một hôm, Gauss nhận được một bức thư của "ngài Leblanc" nào đó. Leblanc rất khâm phục cuốn "*Disquisitiones Arithmeticae*" của Gauss và đã gửi cho Gauss vài kết quả mới về lý thuyết số. Qua việc trao đổi thư từ tiếp sau đó về một số vấn đề toán học, Gauss càng quan tâm hơn tới ngài Leblanc cũng như công trình của ông ta. Mỗi quan tâm đó không hề giảm đi khi mà Gauss phát hiện ra rằng Leblanc không phải là tên thật của người thường xuyên trao đổi thư từ với ông và người viết các bức thư không phải là một "ngài". Nhà toán học viết các bức thư thật hùng biện ấy cho Gauss là Sophie Germain (1776-1831) - một trong số rất ít phụ nữ hoạt động trong lĩnh vực toán học thời đó. Thực tế, khi phát hiện ra sự giấu giếm này, Gauss đã viết cho bà ấy:

"Biết diễn tả thế nào đây với bà về lòng khâm phục và sự ngạc nhiên của tôi khi mừng tượng ngài Leblanc - một người bạn quý mến thường xuyên trao đổi thư từ với tôi - tự biến thành một nhân vật rạng rỡ, người thể hiện một tấm gương sáng chói làm tôi khó có thể tin được..."

(Đây là thư Gauss gửi cho Sophie Germain, viết ở Brunswick vào ngày sinh nhật của ông vì cuối thư có đề dòng: "Bronsvie ce 30 avril 1807 jour de ma naissance" - nghĩa là "Brunswick, nhân ngày sinh nhật của tôi 30 tháng 4 năm 1807").

Sophie Germain đã lấy tên đàn ông để tránh định kiến bài thị các nhà khoa học nữ đang thịnh hành thời bấy giờ và để nhận được sự chú ý thực sự của Gauss. Bà là một trong số các nhà toán học đóng vai trò quan trọng nhất trong quá trình cố gắng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat và đã mở đường đáng kể cho việc tìm lời giải bài toán này. Định lý Sophie Germain, một định lý đã mang lại cho bà danh tiếng đáng kể, phát biểu rằng nếu nghiệm của

phương trình Fermat với $n=5$ tồn tại, thì cả ba số phải chia hết cho 5. Định lý này đã tách Định lý cuối cùng của Fermat thành hai trường hợp: Trường hợp I đối với các số không chia hết cho 5 và trường hợp II đối với các số chia hết cho 5. Định lý này đã được tổng quát hóa với các lũy thừa khác và Sophie Germain đã đưa ra một định lý tổng quát cho phép chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat trong trường hợp I đối với tất cả các số nguyên tố n nhỏ hơn 100. Đây là một kết quả quan trọng làm giảm bớt các khả năng có thể xảy ra khi Định lý cuối cùng của Fermat có thể sai đối với các số nguyên tố nhỏ hơn 100 thì chỉ sai trong trường hợp II [\[10\]](#).

Sophie Germain đã phải chấm dứt việc giả danh của mình khi Gauss yêu cầu người bạn "Leblanc" của ông một sự giúp đỡ. Năm 1807, Napoleon chiếm đóng nước Đức. Người Pháp bắt người Đức phải bồi thường chiến tranh và họ định đoạt tổng số tiền mỗi người dân phải đóng dựa vào việc họ cảm nhận thấy mỗi người có giá trị như thế nào. Với vai trò là nhà thiên văn học và giáo sư nổi tiếng tại Trường Đại học Tổng hợp Gottingen, Gauss bị chỉ định phải nộp 2000 franc - con số vượt xa tài sản mà ông có. Một số nhà toán học Pháp - những người bạn của Gauss vĩ đại, đã tình nguyện giúp đỡ Gauss, nhưng ông từ chối nhận tiền của họ. Gauss muốn ai đó nhân danh ông can thiệp với vị tướng Pháp Pernety ở Hanover.

Ông viết thư cho bạn mình, ngài Leblanc, hỏi xem Leblanc có thể nhân danh Gauss liên hệ với vị tướng Pháp được không. Khi đó Sophie Germain đã đáp ứng đề nghị của Gauss rất vui vẻ và việc này bộc lộ rõ ràng bà là ai. Gauss rất xúc động, như đã thấy trong bức thư của ông gửi Sophie Germain ở trên và mối quan hệ thư từ của họ về nhiều đề tài toán học vẫn tiếp tục duy trì và phát triển hơn nữa. Đáng tiếc, hai người chẳng bao giờ gặp nhau. Sophie Germain đã mất ở Paris vào năm 1831 trước khi Trường Đại học Tổng hợp Gottingen phong tặng bà học vị tiến sĩ danh dự do Gauss đề cử.

Sophie Germain còn có nhiều thành tựu khác được công nhận ngoài những đóng góp của bà cho việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Bà còn có đóng góp tích cực trong lý thuyết toán học của âm học và đàn hồi cũng như trong nhiều lĩnh vực toán học ứng dụng và lý thuyết khác. Trong lý thuyết số, bà cũng đã chứng minh nhiều định lý mà nhờ chúng các số nguyên tố có thể dẫn đến các phương trình giải được.

Sao chổi rực sáng năm 1811 Gauss đã thực hiện nhiều nghiên cứu quan trọng về thiên văn học nhằm xác định quỹ đạo của các hành tinh. Ngày 22 tháng 8 năm 1811, ông là người đầu tiên quan sát được một ngôi sao chổi sáng lên trong bầu trời đêm. Ông có khả năng dự đoán chính xác quỹ đạo hướng về Mặt Trời của sao chổi. Khi sao chổi

xuất hiện rõ và quét một vầng sáng rực ngang qua bầu trời thì những người mê tín và bị áp bức ở châu Âu đã mừng tượng đó là điềm trời báo ngày tận thế của Napoleon đang đến. Quan sát sao chổi, Gauss thấy rõ nó thực hiện đúng quỹ đạo mà ông đã dự đoán trước, chính xác đến từng con số. Nhưng niềm tin không có cơ sở khoa học của quần chúng cũng đúng - năm sau Napoleon đã bị đánh bại và rút quân khỏi nước Nga. Gauss rất vui mừng khi nhìn thấy Napoleon thua trận, vì quân đội Pháp đã bòn rút của ông và đồng bào mình những khoản tiền lớn.

Một người học trò Tháng 10 năm 1826 nhà toán học Na Uy là Niels Henrik Abel đến thăm Paris. Ở đó ông đã cố tìm gặp các nhà toán học khác - khi ấy Paris là thành phố trung tâm của toán học. Một trong số những người gây ấn tượng nhiều nhất đối với Abel là Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), người Phổ. Dirichlet cũng đang viếng thăm Paris và đã chú ý đến chàng trai trẻ Na Uy. Thoạt đầu Dirichlet nghĩ rằng Abel là một chàng trai Phổ. Abel có ấn tượng rất mạnh về việc Dirichlet đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat với $n=5$. Ông đã viết về điều này trong bức thư gửi một người bạn, trong đó đề cập rằng Adrien-Marie Legendre (1752-1833) cũng đã thực hiện được chứng minh đó. Abel đã miêu tả Legendre là một người hết sức lịch sự và đã già. Legendre đã chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat với $n = 5$ hoàn toàn độc lập với Dirichlet, người cũng chứng minh được điều này 2 năm sau đó. Thật đáng tiếc, chuyện thể này thường xuyên xảy ra với Legendre - hầu như các công trình của ông đã bị bỏ qua vì có công trình của các nhà toán học trẻ hơn.

Dirichlet là bạn và học trò của Gauss. Khi cuốn sách vĩ đại của Gauss, cuốn "Disquisitiones Arithmeticae", được xuất bản thì lập tức đã được bán hết. Thậm chí các nhà toán học có công trình liên quan đến nghiên cứu của Gauss cũng không có được lấy một bản. Nhiều người có cuốn sách này thì lại không hiểu được chiều sâu công trình của Gauss. Dirichlet có được một cuốn trong tay. Ông mang nó bên mình trong nhiều chuyến du ngoạn đến Paris, Rome và các nơi khác thuộc châu Âu. Ở mọi nơi Dirichlet đến, ông đã ngủ cùng với cuốn sách đặt dưới gối. Cuốn sách của Gauss đã được biết đến như là một cuốn sách mang bảy con dấu niêm phong: Chàng trai có tài Dirichlet được xem là người đã bóc được cả bảy con dấu niêm phong. Dirichlet đã làm được nhiều hơn bất cứ ai khác công việc giải thích và truyền bá cuốn sách của người thầy vĩ đại của mình cho toàn thế giới.

Ngoài việc giải thích và khuếch trương cuốn "Disquisitiones" cũng như việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat với lũy thừa 5, Dirichlet còn thực hiện được nhiều công trình toán học vĩ đại khác. Một kết quả đáng chú ý do Dirichlet tìm ra có liên quan đến cấp số cộng sau: $a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b, v.v...$ trong đó a, b là các số nguyên không có ước số

chung khác 1 (tức là, chúng là các số như 2, 3 hay 3, 5; chứ không phải là các số như 2, 4 - có ước số chung là 2, hay như 6, 9 - có ước số chung là 3). Dirichlet đã chứng minh rằng cấp số cộng đó chứa nhiều vô hạn số nguyên tố. Điều hết sức ngạc nhiên trong phép chứng minh của Dirichlet là thế này: ông đã thực hiện phép chứng minh đó rất tài tình bằng cách sử dụng một lĩnh vực toán học mà thời đó tưởng như rất xa rời lý thuyết số, nhưng bài toán này đúng là thuộc về lĩnh vực toán học mới đó. Trong chứng minh của mình, Dirichlet đã sử dụng phương pháp giải tích, một lĩnh vực toán học quan trọng về các phép toán cao cấp. Giải tích được áp dụng trong các trường hợp có tính chất liên tục: các hàm số xác định trên các tập hợp số liên tục thuộc đường thẳng số - điều này dường như khác xa thế giới rời rạc của các số nguyên và các số nguyên tố - địa hạt của lý thuyết số.

Có thể chính chiếc cầu nối các ngành toán học tưởng như khác nhau sẽ tạo ra một triết học hiện đại để giải quyết hiện tượng Fermat huyền bí trong thời đại của chúng ta. Dirichlet là một người dẫn đường táo bạo trong việc hợp nhất các ngành toán học khác nhau. Về sau, người học trò này đã kế thừa vị trí của thầy mình. Khi Gauss qua đời năm 1855, Dirichlet đã rời bỏ công việc thanh thế của mình ở Berlin để nhận địa vị cao quý thay thế Gauss ở Gottingen.

Những nhà toán học của Napoleon

Vị Hoàng đế của nước Pháp rất quý các nhà toán học mặc dù chính ông không phải là người làm toán. Hai người đặc biệt gần gũi với ông là Gaspard Monge (1746-1818) và Joseph Fourier (1768-1830). Năm 1798 Napoleon đã đem hai nhà toán học này cùng đi với mình đến Ai Cập để giúp ông "khai hóa văn minh" cho đất nước già cỗi đó.

Fourier sinh ra ở Auxene, Pháp vào ngày 21 tháng 3 năm 1768, nhưng khi lên tám tuổi ông đã mồ côi cha mẹ và ngài giám mục địa phương đã giúp ông vào được trường học quân đội. Ngay khi mới mười hai tuổi Fourier đã bộc lộ nhiều hứa hẹn, đã viết những bài thuyết giáo cho các vị chức sắc nhà thờ ở Paris và sau đó những bài viết rất được hâm mộ. Cách mạng Pháp năm 1789 đã cứu chàng trai trẻ Fourier thoát khỏi cuộc sống của một thầy tu. Thay vì là một thầy tu, ông đã trở thành một giáo sư toán học và một người nhiệt tình ủng hộ cách mạng. Khi cuộc cách mạng buộc phải lùi bước trước sức mạnh khủng bố, Fourier cũng bị tấn công bởi sự tàn bạo của nó. Ông sử dụng tài hùng biện của mình đã từng được rèn luyện trong những năm viết các bản thuyết giáo cho nhà thờ để diễn thuyết chống lại các hành động bạo lực lan tràn khắp nơi. Fourier cũng đã sử dụng kỹ năng diễn thuyết trước đám đông của mình vào việc dạy toán trong các trường đại học hàng đầu ở Paris.

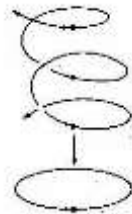
Fourier cũng quan tâm đến kỹ thuật, toán học ứng dụng và vật lý. Tại Trường Đại học Bách khoa, ông đã thực hiện những nghiên cứu quan trọng trong các lĩnh vực này. Nhiều bài báo của ông được trình bày tại Viện Hàn lâm khoa học. Danh tiếng của ông đã làm cho Napoleon chú ý đến và năm 1798 Hoàng đế yêu cầu Fourier đi theo mình trên tàu đồ đốc cùng với Hạm đội Pháp gồm năm trăm chiếc tàu tiến đến Ai Cập. Fourier trực thuộc Quân đoàn Văn hóa. Nhiệm vụ của Quân đoàn này là phải "truyền bá cho dân chúng Ai Cập tất cả lợi ích của nền văn minh châu Âu". Người ta đã cố mang nền văn minh đến cho những người dân đang bị một hạm đội đến xâm lược đất nước họ. Ở Ai Cập, hai nhà toán học (Gaspard Monge và Joseph Fourier) đã thành lập Viện Ai Cập. Fourier đã ở lại đó đến năm 1802 rồi trở về Pháp làm quận trưởng một vùng gần Grenoble. Ở đây ông đã đảm trách nhiều công việc xã hội quan trọng như giải quyết việc tiêu nước các vùng đầm lầy và thanh toán bệnh sốt rét. Cùng với tất cả các công việc đó, Fourier, "một nhà toán học chuyển sang làm nhà quản lý hành chính", đã khéo thu xếp để có thời gian thực hiện ý tưởng toán học có giá trị nhất của mình. Kiệt tác của Fourier là Lý thuyết toán học về nhiệt học nhằm trả lời câu hỏi quan trọng: Quá trình dẫn nhiệt diễn ra như thế nào? Với công trình này, năm 1812 ông đã giành được giải thưởng đặc biệt của Viện Hàn lâm khoa học. Một phần công trình của ông dựa trên các thí nghiệm mà ông đã thực hiện trên các vùng sa mạc của Ai Cập trong những năm ông ở đó. Vài người bạn của ông cho rằng các thí nghiệm này, kể cả việc chính ông phải chịu hơi nóng tạo ra trong các phòng kín, đã làm ông mất sớm ở tuổi 62.

Fourier dành những năm cuối đời để viết truyện kể về Napoleon và mối quan hệ gần gũi giữa Napoleon với ông cả khi ở Ai Cập cũng như sau khi Napoleon trốn thoát khỏi Elba. Tuy nhiên công trình nghiên cứu nhiệt của Fourier mới chính là yếu tố làm cho ông trở thành bất hủ vì ông đã phát triển một lý thuyết quan trọng - Lý thuyết các hàm số tuần hoàn. Một chuỗi các hàm tuần hoàn như thế, khi được sử dụng một cách đặc biệt để đánh giá hàm số khác, được gọi là chuỗi Fourier.

Hàm số tuần hoàn

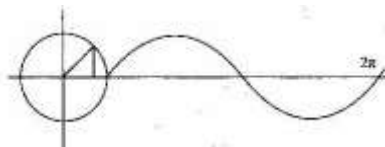
Ví dụ rõ ràng nhất về hàm số tuần hoàn là chiếc đồng hồ của bạn. Chiếc kim dài di chuyển từng phút một xung quanh hình tròn và sau sáu mươi phút nó trở về đúng vị trí ban đầu. Sau đó nó tiếp tục di chuyển và đúng sáu mươi phút sau nó lại quay về chính điểm xuất phát. (Tất nhiên, chiếc kim ngắn cũng sẽ thay đổi vị trí theo giờ). Chuyển động của chiếc kim phút trên đồng hồ là ví dụ về một hàm tuần hoàn. Chu kỳ của nó đúng bằng sáu mươi phút. Xét theo một nghĩa khác, không gian biểu thị tất cả các phút - một tập hợp nhiều vô

hạn phút kể từ bây giờ trở đi cho đến mãi mãi sau này - có thể "được quăn lại" bởi chiếc kim dài của đồng hồ theo viền mép ngoài của mặt đồng hồ (hình 11):



Hình 11

Ví dụ khác: khi một đầu máy tàu hỏa đang lao nhanh trên đường ray, cánh tay đòn truyền năng lượng từ đầu máy tới bánh xe chuyển động lên xuống theo chuyển động quay của bánh xe. Sau bất cứ một vòng quay nào của bánh xe, cánh tay đòn lại trở về vị trí xuất phát của nó - chuyển động của cánh tay đòn này cũng là ví dụ về một hàm tuần hoàn. Độ cao thẳng đứng của cánh tay đòn, khi bán kính của bánh xe tàu hỏa là một đơn vị, được xác định nhờ hàm số sin. Đó là một hàm số lượng giác cơ bản được dạy trong trường phổ thông. Hàm số cosin giúp xác định độ đo của cánh tay đòn theo chiều ngang. Sin và cosin đều là hàm số của góc tạo bởi cánh tay đòn và đường thẳng nằm ngang đi qua tâm của bánh xe. Điều này được minh họa ở hình 12.



Hình 12

Khi tàu hỏa tiến về phía trước, độ cao thẳng đứng của cánh tay đòn di chuyển theo mô hình sóng như hình 12. Mô hình sóng này là tuần hoàn. Chu kỳ của nó là 360 độ. Đầu tiên độ cao của cánh tay đòn bằng 0, sau đó nó tăng dần lên theo hình sóng cho đến khi bằng 1, thế rồi nó lại giảm dần xuống cho đến khi bằng 0, rồi tiếp tục giảm xuống các giá trị âm cho đến khi bằng (-1), thế rồi lại tiếp tục tăng cho đến giá trị 0. Và sau đó các chu kỳ bắt đầu lặp lại mãi.

Fourier đã phát hiện ra một điều là hầu hết các hàm số có thể được đánh giá với bất kỳ độ chính xác nào nhờ tổng của nhiều (theo lý thuyết là nhiều vô hạn để đạt được độ chính xác gần hoàn hảo) hàm số sin và cosin. Đây là một kết quả nổi tiếng về các chuỗi Fourier. Việc khai triển một hàm số nào đó thành tổng của nhiều hàm số sin và cosin có lợi ích trong nhiều ứng dụng toán học khi biểu thức toán học thực tế ta quan tâm là khó nghiên cứu nhưng tổng của các hàm sin và cosin, khi tất cả cùng nhân lên bởi các thừa số khác nhau, có thể dễ dàng thao tác và ước lượng được - và điều này đặc biệt dễ dàng áp dụng trên máy tính. Giải tích số là một lĩnh vực toán học được biết đến vì có mối liên quan với các phương pháp tính để ước lượng các hàm số và các đại lượng khác. Giải tích Fourier là một phần quan trọng của giải tích số và nó cung cấp các kỹ thuật quan trọng để nghiên cứu các bài toán khó mà nhiều trong số đó không có nghiệm dưới dạng đóng (tức là, nghiệm cho bởi một biểu thức toán học đơn giản) nhờ chuỗi Fourier của các hàm tuần hoàn. Tiếp theo công trình tiên phong của Fourier, các khai triển sử dụng các hàm số đơn giản khác - chủ yếu là các đa thức (tức là tăng các lũy thừa của biến số: bình phương, lập phương, v.v...) - cũng được phát triển. Khi máy tính của bạn tính căn bậc hai của một số, nó sẽ thực hiện một phép xấp xỉ dựa trên một phương pháp như thế. Chuỗi Fourier các hàm sin và cosin đặc biệt có lợi trong việc đánh giá các hiện tượng là tổng của các yếu tố tuần hoàn một cách rất tự nhiên, như âm nhạc chẳng hạn. Một bản nhạc có thể được phân tích thành các hòa âm của nó. Nước triều dâng, tuần trăng, vị trí của Mặt Trời là các ví dụ đơn giản về các hiện tượng tuần hoàn.

Như đã nói ở trên, chuỗi Fourier của các hàm tuần hoàn đã có những ứng dụng rất quan trọng trong việc mô tả các hiện tượng tự nhiên và các phương pháp tính toán. Mặt khác, một thực tế bất ngờ rất lý thú cho thấy các chuỗi Fourier còn có những ứng dụng bổ ích trong toán học lý thuyết, một lĩnh vực mà chưa bao giờ là mối quan tâm chính của Fourier. Vào thế kỷ XX, các chuỗi Fourier đã phát huy tác dụng trong lý thuyết số như là công cụ để biến đổi các yếu tố toán học từ lĩnh vực này sang lĩnh vực khác trong công trình của Goro Shimura (chứng minh giả thuyết Shimura là điểm then chốt để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat). Việc mở rộng các hàm tuần hoàn Fourier sang mặt phẳng phức, ngoài tác dụng liên kết hai lĩnh vực toán học đó lại với nhau, còn làm nảy sinh các khái niệm mới về các hàm tự đẳng cấu và các dạng modula. Phát hiện này cũng có ảnh hưởng quan trọng đối với Định lý cuối cùng của Fermat thông qua công trình nghiên cứu trong những năm đầu thế kỷ XX của nhà toán học Pháp Henri Poincaré.

Chứng minh của Lamé

Tại cuộc họp của Viện Hàn lâm khoa học Paris diễn ra ngày 1 tháng 3 năm 1847, nhà toán học Gabriel Lamé (1795-1870) rất hào hứng thông báo rằng, ông đã hoàn thành chứng minh tổng quát Định lý cuối cùng của Fermat. Trước đó mới chỉ có các lũy thừa n đặc biệt được xem xét và Định lý được chứng minh trong các trường hợp $n = 3, 4, 5, 7$. Lamé nói rằng ông có phương pháp tổng quát để tiếp cận bài toán và phương pháp này sẽ áp dụng đối với bất kỳ lũy thừa n nào. Phương pháp của Lamé dựa vào việc phân tích về trái phương trình Fermat, $x^n + y^n$, thành các nhân tử tuyến tính nhờ các số phức. Sau đó Lamé khiêm tốn phát biểu rằng vinh dự này không chỉ thuộc về ông, vì Joseph Liouville (1809-1882) đã giới thiệu với ông phương pháp đó. Nhưng Liouville lánh ở dãy ghế phía sau Lamé và phớt lờ bất cứ sự ca ngợi nào. "Lamé không hoàn tất được chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat", Liouville nhẹ nhàng nói, "bởi vì phép phân tích thành thừa số mà Lamé đưa ra không phải là duy nhất (tức là có nhiều cách thực hiện phép phân tích thành thừa số, vì vậy bài toán chưa có lời giải)". Đây là một trong nhiều cố gắng lớn lao mà không đem lại thành quả. Tuy nhiên, ý tưởng phân tích thành thừa số, tức là phân tích phương trình thành tích các nhân tử, còn cần phải được nghiên cứu thêm.

Những con số lý tưởng

Người đã tiếp tục phép phân tích thành thừa số là Ernst Eduard Kummer (1810-1893). Ông đã tiếp cận lời giải tổng quát của bài toán Fermat gần hơn bất cứ ai khác trong thời đại của mình. Thực tế là trong khi cố gắng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, Kummer đã phát minh ra một lý thuyết toán học mới trọn vẹn, lý thuyết về các "số lý tưởng".

Mẹ của Kummer, một người trở thành quả phụ khi con trai mình mới ba tuổi, đã làm việc rất vất vả để đảm bảo cho con trai được học hành chu đáo. Năm mười tám tuổi, Kummer vào Trường Đại học Halle (Đức) để nghiên cứu thần học và chuẩn bị cho mình một cuộc sống trong nhà thờ. Một giáo sư toán học uyên bác có tâm huyết với đại số và lý thuyết số đã làm cho chàng trai Kummer phải say mê các lĩnh vực này và anh đã nhanh chóng bỏ thần học để chuyển sang toán học. Khi là sinh viên năm thứ ba, chàng trai Kummer đã giải quyết được một vấn đề toán học hóc búa và được nhận giải thưởng. Tiếp theo thành công này, anh được nhận học vị tiến sĩ toán học ở tuổi hai mươi mốt.

Nhưng Kummer không thể tìm được một chỗ làm trong trường đại học, vì vậy anh đã phải giảng dạy tại trường trung học cũ của mình. Anh làm thầy giáo phổ thông suốt mười năm. Trong thời kỳ này, Kummer đã tiến hành rất nhiều nghiên cứu và các kết quả nghiên cứu được anh xuất bản cũng như viết trong các bức thư gửi một số nhà toán học hàng đầu thời

đó. Bạn bè anh cảm thấy thật buồn vì một nhà toán học có tài như thế lại chỉ dành cuộc đời mình cho việc giảng dạy toán phổ thông. Với sự giúp đỡ của một số nhà toán học nổi tiếng, Kummer đã nhận được chức giáo sư tại Trường Đại học Breslau. Một năm sau, năm 1855, Gauss qua đời. Dirichlet thay thế vị trí của Gauss ở Gottingen và thôi công việc cũ của ông tại Trường Đại học Tổng hợp Berlin danh tiếng. Kummer đã được chọn thay thế Dirichlet ở Berlin. Ông giữ vị trí đó cho đến khi ông nghỉ hưu.

Kummer nghiên cứu nhiều vấn đề toán học khác nhau, trải khắp từ những lĩnh vực rất trừu tượng đến rất thực tiễn - thậm chí cả các ứng dụng toán học trong chiến tranh. Nhưng ông đã nổi tiếng bởi công trình lớn của mình về Định lý cuối cùng của Fermat. Nhà toán học Pháp Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) nhiều lần nghĩ rằng mình đã tìm được lời giải tổng quát phương trình Fermat. Nhưng Cauchy, một người làm việc không có nghỉ ngơi song đôi khi thiếu cẩn tắc, sau mọi cố gắng của mình đã nhận ra rằng bài toán quá khó so với tưởng tượng của ông. Các trường số mà ông sử dụng luôn thiếu tính chất ông cần. Cauchy đã dẹp bài toán sang một bên và chuyển sang làm việc khác.

Kummer trở nên bị ám ảnh vì Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng các cố gắng không thành của ông nhằm chứng minh định lý này khiến ông thất vọng vì ông cũng lại đi theo con đường vô vọng giống như Cauchy. Khi nhận ra rằng các trường số liên quan thiếu một vài tính chất, thay cho việc từ bỏ hy vọng, ông đã phát minh ra các số mới có những tính chất mà ông cần. Ông gọi các số này là các "số lý tưởng". Vậy là Kummer đã phát minh ra một lý thuyết hoàn toàn mới từ những cố gắng của mình nhằm chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Lúc đó, Kummer nghĩ rằng ông đã tìm được chứng minh tổng quát. Nhưng, thật đáng tiếc, chứng minh đó vẫn thiếu cái cần thiết phải có.

Tuy nhiên, Kummer đã đạt được những thành công to lớn trong quá trình đi tìm lời giải bài toán Fermat. Công trình nghiên cứu "số lý tưởng" của ông đã cho phép ông chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat đối với một lớp rất rộng các lũy thừa n là số nguyên tố. Như thế, ông đã có thể chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat là đúng đối với một số vô hạn các lũy thừa n , tức là những số chia hết cho các số nguyên tố "thông thường". Các số nguyên tố "đặc biệt" đã né tránh ông. Chỉ có 37, 59, 67 là các số nguyên tố đặc biệt mà nhỏ hơn 100. Sau đó, Kummer đã nghiên cứu riêng về vấn đề các số nguyên tố đặc biệt này và cuối cùng ông đã có thể chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat đối với các số này. Vào thập niên 50 của thế kỷ thứ XIX, nhờ những đột phá đặc biệt của Kummer, Định lý cuối cùng của Fermat đã được chứng minh là đúng đối với tất cả các lũy thừa n nhỏ hơn 100, cũng như đối với nhiều vô hạn các bội số của các số nguyên tố trong phạm vi này. Điều này quả là một thắng lợi thực sự, dù rằng đây không phải là một chứng minh tổng quát và nó vẫn còn bỏ sót nhiều vô hạn số mà đối với chúng người ta chưa biết định lý có đúng hay không.

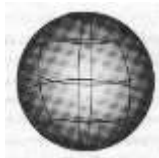
Năm 1816, Viện Hàn lâm khoa học Pháp treo giải thưởng cho bất cứ ai chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat. Năm 1850, Viện Hàn lâm này lại tuyên bố sẽ tặng huy chương vàng và 3000 franc cho nhà toán học nào chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat. Song đến năm 1856, Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã tuyên bố rút lại quyết định này vì người ta nhận thấy là dường như không thể nào chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat. Thay vào đó, Viện Hàn lâm đã quyết định trao một giải thưởng khác cho Ernst Eduard Kummer "vì các nghiên cứu tuyệt vời của ông về số phức bao gồm các căn của đơn vị và các số nguyên". Vậy là, Kummer đã được trao tặng một giải thưởng mà ông không hề ra ứng cử.

Kummer vẫn tiếp tục các cố gắng không mệt mỏi của ông vì Định lý cuối cùng của Fermat. Đến năm 1874 ông mới ngừng việc nghiên cứu của mình. Kummer cũng đã thực hiện công trình nghiên cứu đầu tiên về hình học không gian bốn chiều. Một số kết quả của ông có ích trong lĩnh vực vật lý hiện đại có tên gọi là cơ học lượng tử. Kummer mất năm 1893 vì bệnh cúm khi ông ở tuổi ngoài tám mươi.

Các nhà toán học đánh giá cao thành công của Kummer về các "số lý tưởng", thậm chí còn cao hơn cả các tiến bộ mà ông đã đạt được trong việc giải bài toán Fermat nhờ các số này. Thực tế là lý thuyết đáng chú ý này đã nảy sinh từ các cố gắng tìm lời giải cho Định lý cuối cùng của Fermat và nó chỉ ra rằng các lý thuyết mới có thể được phát triển như thế nào nhờ các cố gắng nhằm giải quyết các bài toán riêng lẻ. Trong thực tế, lý thuyết các "số lý tưởng" của Kummer đã dẫn đến cái mà ngày nay được biết đến là các ideal. Chính các ideal này đã có ảnh hưởng tới công trình nghiên cứu Định lý cuối cùng của Fermat của Wiles và các nhà toán học khác trong thế kỷ XX.

Một giải thưởng khác Năm 1908, Người Đức treo giải thưởng Wolfskehl trị giá 100000 mác cho người nào tìm được chứng minh tổng quát cho Định lý cuối cùng của Fermat. Ngay trong năm đầu treo giải, 621 "lời giải" đã được đệ trình song tất cả các "lời giải" đều sai. Những năm tiếp theo, hàng ngàn "lời giải" nữa đã được gửi đến nhưng kết quả cũng như thế. Trong thập niên 1920, sự lạm phát quá độ của Đức đã làm giảm giá trị của 100000 mác xuống gần như chẳng còn giá trị gì nữa. Nhưng các chứng minh sai cho Định lý cuối cùng của Fermat vẫn tiếp tục đổ về.

Hình học phi Euclid Những phát triển mới đã bắt đầu xảy ra trong toán học ở thế kỷ XIX. Janos Bolyai (1802-1860) và Nicolas Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856), một người Hungary và một người Nga, đã làm thay đổi bộ mặt môn hình học. Bằng việc bỏ đi tiên đề Euclid: hai đường thẳng song song không bao giờ gặp nhau, hai nhà toán học này đã có thể độc lập xây dựng một thế giới hình học vẫn giữ lại rất nhiều tính chất của Euclid, chỉ có điều khác là đã thừa nhận hai đường thẳng song song sẽ gặp nhau tại một điểm ở vô cùng. Quan niệm hình học mới này có thể quan sát được, ví dụ, trên một mặt cầu như Trái Đất chẳng hạn. Xét về cục bộ thì hai đường kinh tuyến song song với nhau. Nhưng trên thực tế, khi kéo dài chúng đến cực bắc thì hai kinh tuyến này gặp nhau ở đó (hình 13). Môn hình học mới này giải quyết nhiều vấn đề và đã giải thích được các hiện tượng mà trước đó có vẻ như là thần bí và không có lời giải đáp.



Hình 13

Thành công và bi kịch

Đại số trừu tượng, một lĩnh vực được hình thành từ môn đại số quen thuộc được dạy trong trường phổ thông để giải phương trình, đã được phát triển trong thế kỷ XIX. Trong lĩnh vực này, một lý thuyết đẹp nổi bật là lý thuyết Galois.

Évariste Galois ra đời năm 1811 tại một làng nhỏ bé vùng Bourg-la-Reine, ngoại ô Paris. Cha ông là một thị trưởng và một đảng viên trung thành của Đảng Cộng hòa. Cậu bé Évariste lớn lên trong bầu không khí của các lý tưởng dân chủ và tự do. Đáng tiếc là thời kỳ đó hầu như cả nước Pháp đang hướng về phía đối lập. Cuộc cách mạng Pháp đã nổ ra nhưng rồi lại nhanh chóng tắt lịm và Napoleon cũng vậy. Nhưng giấc mơ tự do, bình đẳng và bác ái vẫn chưa đạt được. Phái bảo hoàng đã vui mừng với sự trở lại của chế độ cũ ở nước Pháp, cùng với một gã Bourbon lại lên làm vua nước Pháp - giờ đây cùng nắm quyền hành với các đại biểu nhân dân.

Évariste đã đắm mình trong những lý tưởng cao đẹp của cuộc cách mạng. Ông là một nhà tư tưởng tiến bộ và đã có một số bài phát biểu cảm động với những người ủng hộ chế độ Cộng hòa. Mặt khác, với tư cách một nhà toán học, ông là nhà thiên tài có một không hai. Thời niên thiếu Galois đã tiếp thu được toàn bộ lý thuyết đại số và các phương trình mà các nhà toán học có tài năng hoàn hảo thời đó biết đến. Khi còn là một học sinh phổ thông, ông đã hoàn thành một công trình nghiên cứu xuất sắc mà ngày nay được biết đến với tên gọi Lý thuyết Galois. Thật đáng tiếc, ông đã không được hưởng bất kỳ sự công nhận nào trong cuộc đời ngắn ngủi đầy bi kịch của mình. Trong trường học nội trú, Galois đã thức nhiều đêm để viết ra lý thuyết của mình trong khi những người khác ngủ. Ông gửi nó cho người đứng đầu Viện Hàn lâm khoa học Pháp, nhà toán học Cauchy, với hy vọng rằng Cauchy sẽ giúp đỡ ông công bố lý thuyết này. Nhưng Cauchy không chỉ rất bận mà ông còn kiêu ngạo và cầu thả. Do vậy bản thảo kiệt xuất của Galois đã bị chôn vùi trong thùng rác mà chưa được ai đọc.

Galois thử lần nữa song kết quả cũng vẫn thế. Trong khi ấy, ông đã không qua được kỳ thi tuyển vào Trường Đại học Bách khoa, nơi đào tạo hầu hết các nhà toán học lừng danh của

nước Pháp. Galois có thói quen thường xuyên suy nghĩ giải quyết ngay các vấn đề trong đầu mình. Ông không bao giờ ghi chép hay viết ra điều gì trước khi có kết quả cụ thể. Phương pháp này chú ý đến các ý tưởng hơn là chi tiết. Chàng thanh niên Évariste có rất ít tính nhẫn nại hay sự quan tâm đối với các chi tiết. Chỉ có tư tưởng lớn, nét đẹp của một lý thuyết rộng lớn mới là điều làm ông say mê. Vì vậy, Galois không phát huy được điểm mạnh của mình khi làm bài thi trên bảng. Đây chính là nguyên nhân khiến cho hai lần cố gắng thi vào ngôi trường mà ông mơ ước đều hỏng. Hai lần đứng trước bảng đen ông đã không thực hiện tốt việc viết ra các chi tiết lời giải, và ông đã cúi gập người khi bị hỏi các chi tiết mà ông cho là chẳng có gì quan trọng. Một con người trẻ tuổi thông minh lạ thường mà phải trả lời các câu hỏi của các vị giám khảo có khả năng kém hơn anh ta, những người không thể hiểu nổi các tư tưởng sâu sắc của anh ta và cho việc anh ta miễn cưỡng đưa ra các chi tiết thông thường là dốt nát thì quả là một bi kịch. Khi nhận thấy rằng lần cố gắng thứ hai và cũng là lần được phép cuối cùng này sẽ thất bại, và rằng cổng Trường Đại học Bách khoa sẽ đóng lại với ông mãi mãi, Galois đã ném chiếc giẻ lau bảng vào mặt vị giám khảo hỏi thi ông.

Galois đành phải chấp nhận lựa chọn ngôi trường tốt thứ hai - Trường Đại học Sư phạm. Nhưng ngay cả ở đây ông cũng không được ổn cho lắm. Người cha của Galois, thị trưởng Bourg-la-Reine, là mục tiêu mà giới tăng lữ trong thành phố ngầm chống đối. Một thầy tu bất lương đã lưu hành các bài thơ khiêu dâm ký tên ngài thị trưởng. Những tháng ngày bị quấy rầy ấy đã làm cho người cha của Galois mất lòng tin và ông trở nên tin rằng thế giới cổ tình đẩy ông vào chân tường. Mất dần mối liên hệ với thực tế, ông đã đến Paris. Tại đây, trong một căn phòng nhỏ không xa nơi con trai mình đang học tập, người cha đã tự tử. Chàng thanh niên Galois không bao giờ trở lại bình thường được sau thảm kịch này. Bị ám ảnh vì nguyên nhân thất bại của cuộc cách mạng 1830, và thất vọng với ông hiệu trưởng - người mà Galois cho là một kẻ ủng hộ phái bảo hoàng và các tu sĩ, ông đã viết một bức thư gay gắt chỉ trích ông hiệu trưởng. Ông đã quyết định làm như vậy sau ba ngày tham gia bạo động trên các đường phố khi mà sinh viên khắp Paris đang nổi lên chống lại chính thể. Galois và những người bạn cùng lớp đã bị nhốt trong trường của mình, không thể trèo ra khỏi bức tường rào cao ngất. Chàng trai Galois căm giận đã gửi bức thư cay nghiệt phê phán ông hiệu trưởng đến tờ Gazette des Écoles (Tập san Đại học). Và kết quả là ông bị đuổi khỏi trường. Nhưng Galois không khuất phục - ông viết lá thư thứ hai gửi tờ báo trên, kêu gọi sinh viên trong trường hãy nói thẳng quan điểm của mình vì danh dự và lương tâm nhưng ông không nhận được sự hưởng ứng nào.

Ra khỏi trường đại học, thoát đầu Galois đi dạy tư về toán học. Ông muốn dạy các lý thuyết toán học của chính mình khi ông mới chỉ vắn vắn có mười chín tuổi. Nhưng Galois không thể tìm được sinh viên để dạy - các lý thuyết của ông quá cao cấp; ông đã vượt xa thời đại mình.

Đối mặt với tương lai chẳng có gì chắc chắn và bị kết tội không đủ tư cách để tiếp tục theo đuổi nền giáo dục tốt đẹp, trong lúc tuyệt vọng Galois đã xung vào binh chủng pháo binh của quân đội Pháp. Trong quân đội Pháp, mà người đứng đầu thời kỳ trước đó là Lafayette, có nhiều ý tưởng tự do gần gũi với tư tưởng chính trị của chàng thanh niên trẻ Galois. Khi ở trong quân đội, Galois đã thực hiện cố gắng cuối cùng để xuất bản công trình toán học của mình. Ông viết một bài báo khoa học về phương pháp tổng quát giải các phương trình - mà ngày nay được công nhận là Lý thuyết Galois tuyệt diệu - và gửi nó cho Siméon Denis-Poisson (1781-1842) ở Viện Hàn lâm khoa học Pháp. Poisson đọc bài báo và nhận xét là "không thể hiểu được". Một lần nữa, chàng trai mười chín tuổi đầu lại vượt xa tất cả các nhà toán học Pháp cao tuổi hơn mình vào thời đó đến nỗi các lý thuyết mới nhất của anh đều cao hơn tầm những cái đầu của họ. Lúc đó, Galois đã quyết định từ bỏ toán học và sẽ chỉ làm cách mạng. Ông nói rằng nếu cần một thân xác để làm cho nhân dân tham gia cách mạng thì ông sẽ dâng hiến chính bản thân mình.

Ngày 9 tháng 5 năm 1831, hai trăm đảng viên Cộng hòa trẻ tuổi đã tổ chức một bữa tiệc lớn. Tại đây họ phản đối việc chế độ hoàng gia giải tán binh chủng pháo binh của quân đội. Những chén rượu đã được nâng lên để chúc mừng cuộc cách mạng Pháp và những người anh hùng của nó, cũng như cho cuộc cách mạng tiến bộ năm 1830. Galois đứng dậy và đề nghị nâng cốc. Ông nói "dành cho Louis Philippe", công tước xứ Orléans, người đang là vua của nước Pháp. Trong khi nói những lời này, một tay nâng cao cốc rượu của mình, tay kia Galois giơ cao một con dao đã rút khỏi bao. Người ta cho đây là một hành động đe dọa tính mạng của nhà vua và gây bạo động. Ngày hôm sau Galois bị bắt.

Trong phiên tòa xử Galois vì tội đe dọa tính mạng nhà vua, luật sư của Galois phát biểu rằng thực tế khi đang cầm con dao của mình Galois đã nói "giành cho Philippe, nếu ông ta trở thành một kẻ phản bội". Vài người bạn pháo binh của Galois có mặt khi đó đã chứng thực điều này, và ban bồi thẩm đã phán xử ông không có tội. Galois nhặt lấy con dao của mình ở trên bàn để vật chứng, nhét nó vào bao rồi rút vào túi và rời khỏi tòa án như một người tự do. Nhưng ông được tự do cũng chẳng bao lâu. Một tháng sau ông lại bị bắt vì bị tình nghi là một đảng viên Cộng hòa nguy hiểm. Ông bị nhốt trong nhà giam một cách vô cớ trong khi các nhà chức trách tìm kiếm lý do để buộc tội ông. Cuối cùng họ tìm được một chứng cứ là ông mặc bộ đồng phục của binh chủng pháo binh đã giải tán. Galois bị xử vì tội này với cái án sáu tháng tù giam. Phái bảo hoàng lấy làm hài lòng vì cuối cùng đã bỏ tù được chàng trai hai mươi tuổi mà họ cho là kẻ thù nguy hiểm của chính thể. Một thời gian sau, Galois được hưởng chế độ quản thúc và bị chuyển đến một nơi mà điều kiện sống không được bảo đảm. Những gì xảy ra sau đó vẫn còn là một câu hỏi. Trong khi bị quản thúc, Galois đã gặp và yêu một phụ nữ. Một vài người cho rằng ông đã mắc bẫy của những người thuộc phái bảo hoàng thù địch với ông. Họ muốn chấm dứt các hành động cách mạng của ông mãi mãi. Dù sao đi nữa thì người phụ nữ mà ông có quan hệ này cũng có đức hạnh đáng ngờ ("*une coquette de bas étage*"). Ngay khi hai người mới yêu nhau, một gã bảo hoàng đã đến để "bảo vệ danh dự của cô ta" và thách Galois đấu súng. Nhà toán học trẻ tuổi chẳng có cách nào để thoát khỏi

hoàn cảnh phức tạp đó. Ông đã thử bằng mọi cách để có thể thuyết phục gã đàn ông từ bỏ ý định đấu súng nhưng không có kết quả.

Vào đêm trước cuộc đấu súng, Galois đã viết một số bức thư gửi các bạn của ông để họ biết rằng ông đã bị phái bảo hoàng mưu hại. Ông viết là hai tên bảo hoàng đã thách đấu với ông và chúng đã ép ông vì danh dự không được kể về cuộc thách đấu cho những người bạn của ông trong đảng Cộng hòa. "Tôi chết như nạn nhân của một mụ đàn bà đom đóm đáng bỉ ổi. Than ôi, tại sao tôi lại chết vì một cái bẫy tầm thường như vậy. Tại sao lại phải chết một cách hèn hạ đến thế!". Nhưng quan trọng nhất là vào đêm trước cuộc đấu súng, Galois đã cẩn thận viết ra toàn bộ lý thuyết toán học của ông rồi gửi cho người bạn của mình là Auguste Chevalier. Sáng sớm ngày 30 tháng 5 năm 1832, Galois đối mặt với địch thủ của mình trên một cánh đồng hoang. Ông bị bắn vào bụng và đơn độc nằm lại đó trong đau đớn quằn quại. Chẳng có ai đi gọi bác sĩ. Cuối cùng, một người nông dân tìm thấy ông và đưa ông đến bệnh viện. Tại đó, sáng hôm sau ông đã qua đời. Ông mới hai mươi tuổi. Năm 1846, nhà toán học Joseph Liouville đã biên tập và công bố lý thuyết toán học mới nhất của Galois trên một tạp chí. Lý thuyết Galois sẽ tạo một bước tiến quan trọng trong phương pháp được sử dụng một thế kỷ rưỡi sau đó để chinh phục Định lý cuối cùng của Fermat.

Một nạn nhân khác

Tính cầu thả và tự cao của Cauchy đã phương hại đến cuộc đời của ít nhất một nhà toán học xuất sắc khác. Niels Henrik Abel (1802-1829) là con trai một mục sư của làng Findo ở Na Uy. Khi Abel mười sáu tuổi, thầy giáo đã động viên ông đọc cuốn sách nổi tiếng của Gauss - cuốn "Disquisitiones ". Abel thậm chí đã thành công cả trong việc sửa lại một vài thiếu sót của các chứng minh một số định lý trong cuốn sách đó. Nhưng hai năm sau cha ông đã qua đời và chàng thanh niên Abel đã phải tạm hoãn việc nghiên cứu toán học để tập trung các cố gắng của mình vào việc giúp đỡ gia đình. Mặc dù phải đối mặt với những khó khăn lớn, Abel vẫn thu xếp để tiếp tục một vài nghiên cứu toán học và đã có một phát minh toán học nổi tiếng ở tuổi mười chín. Năm 1824, ông công bố một bài báo, trong đó chứng minh rằng không thể có phương pháp giải các phương trình bậc năm. Vậy là Abel đã giải quyết xong một trong những vấn đề nổi tiếng nhất thời kỳ đó. Tuy vậy nhà toán học trẻ thiên tài vẫn chưa được bổ nhiệm vào một vị trí khoa học nào, điều mà ông rất cần để có điều kiện giúp đỡ gia đình. Vì thế, ông gửi công trình của mình cho Cauchy nhờ đánh giá, công bố nếu có thể, và khẳng định. Bài báo mà Abel gửi cho Cauchy đề cập đến các chuỗi số đặc biệt và các tính chất chung. Nhưng Cauchy đã để mất bài báo đó. Một vài năm sau, khi bài báo này xuất hiện trên một tạp chí thì đã quá muộn và không thể giúp gì cho Abel. Năm 1829 Abel chết vì bệnh lao mà ông đã mắc phải do cảnh bần cùng và sự gắng sức giúp đỡ gia đình trong tình

cảnh bi thảm. Hai ngày sau cái chết của ông, một bức thư đã được gửi đến Abel thông báo rằng ông đã được bổ nhiệm chức vụ giáo sư tại Trường Đại học Tổng hợp Berlin.

Khái niệm nhóm Abel (ngày nay được xem là một từ và được viết bằng chữ "a" thường, tức là abel) là một khái niệm rất quan trọng trong đại số hiện đại và là yếu tố chủ đạo của phương pháp hiện đại để giải bài toán Fermat. Nhóm abel là một nhóm trong đó thứ tự các phép toán có thể đảo ngược (giao hoán) mà không ảnh hưởng đến kết quả. Đa tạp abel còn là một khái niệm đại số trừu tượng hơn và nó cũng có ứng dụng rất quan trọng trong các phương pháp hiện đại để tìm ra chứng minh cho Định lý cuối cùng của Fermat.

Các idêan Dedekind

Di sản của Carl Friedrich Gauss còn tiếp tục truyền lại qua nhiều thế kỷ. Một trong những người kế thừa sự nghiệp toán học của Gauss đáng chú ý nhất là Richard Dedekind (1831-1916). Ông, cũng như người thầy vĩ đại của mình, sinh ra ở thành phố Brunswick của nước Đức. Tuy nhiên, có điều khác với Gauss là khi còn nhỏ Dedekind không hề tỏ ra thích thú toán học hay là có khả năng toán học. Ông thích vật lý, hóa học hơn và xem toán học là công cụ phục vụ các ngành khoa học. Nhưng đến năm mười bảy tuổi, Dedekind đã vào chính ngôi trường mà ở đây Gauss vĩ đại đã được đào tạo về toán học - Trường Đại học Caroline - và ở đây tương lai của ông đã thay đổi. Dedekind bắt đầu quan tâm đến toán học và ông đã tiếp tục mối quan tâm đó ở Gottingen, nơi Gauss đang giảng dạy. Năm 1852, ở tuổi hai mươi mốt, Richard Dedekind đã được Gauss trao bằng tiến sĩ. Người thầy đã tìm thấy trong bản luận văn của học trò mình những phép toán giải tích khiến thầy "hài lòng tuyệt đối". Đây chưa phải là một lời khen tuyệt vời nhất. Thực tế, thiên tài của Dedekind khi ấy vẫn chưa bộc lộ hoàn toàn.

Năm 1854, Dedekind được bổ nhiệm chức giảng viên ở Gottingen. Đến khi Gauss mất năm 1855 và Dirichlet chuyển từ Berlin đến thay vị trí của Gauss thì Dedekind đã tham dự tất cả các bài giảng của Dirichlet ở Gottingen và biên tập một công trình có tính chất mở đường trong thời kỳ đó của Dirichlet về lý thuyết số. Dedekind đã viết thêm phần bổ sung cho công trình đó, dựa trên chính những kết quả của mình. Phần bổ sung này bao hàm phác thảo một lý thuyết mà Dedekind đã xây dựng cho các số đại số - các số được định nghĩa như là nghiệm của phương trình đại số. Chúng bao gồm bội số của các căn bậc hai của các số cùng với các số hữu tỷ. Các trường số đại số là rất quan trọng trong việc nghiên cứu phương trình Fermat vì chúng nảy sinh khi giải các phương trình có dạng khác nhau. Như vậy, Dedekind đã phát triển một lĩnh vực quan trọng trong lý thuyết số.

Đóng góp lớn nhất của Dedekind cho quá trình tiến tới chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat là việc phát triển lý thuyết các ideal, một trừu tượng hóa của các số lý tưởng của Kummer. Một thế kỷ sau Dedekind, các ideal đã truyền cảm hứng cho Barry Mazur và chính công trình của Mazur đã được Andrew Wiles khai thác.

Trong năm học 1857-1858, Richard Dedekind đã giảng chuyên đề toán học đầu tiên về Lý thuyết Galois. Óc suy xét toán học của Dedekind rất trừu tượng và ông đã nâng lý thuyết nhóm lên trình độ hiện đại như ngày nay người ta hiểu và dạy về nó. Trừu tượng hóa là bước chuẩn bị cho thế kỷ XX để có thể tiếp cận bài toán Fermat. Chuyên đề có tính chất đột phá của Dedekind về các lý thuyết đã được phát triển bởi Galois là một bước đi dài theo hướng này. Chỉ có hai sinh viên đã tham dự bài giảng đó.

Từ đấy sự nghiệp của Dedekind đã có một bước ngoặt lạ kỳ. Ông đã rời Gottingen để đảm nhận một vị trí ở Zurich, rồi 5 năm sau, vào năm 1862, ông quay trở về Brunswick và ở đây, suốt 50 năm, ông giảng dạy trong một trường trung học. Chẳng ai có thể giải thích được tại sao nhà toán học kiệt xuất, người đã đưa ngành đại số lên một trình độ khái quát hóa và trừu tượng hóa không gì sánh được, lại đột nhiên rời bỏ một trong những vị trí danh giá nhất tại bất kỳ một trường đại học nào ở châu Âu để về dạy ở một trường trung học vô danh. Dedekind không kết hôn lần nào và suốt nhiều năm trời ông sống với người chị gái. Ông vẫn giữ được đầu óc thông minh, lanh lợi cho đến ngày cuối cùng của đời mình và mất vào năm 1916.

Kết thúc thế kỷ

Vào cuối thế kỷ XIX, ở Pháp có một nhà toán học với năng lực tuyệt vời trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Tri thức uyên bác của Henri Poincaré (1854-1912) vượt ra cả ngoài phạm vi toán học. Vào năm 1902 và sau đó, khi mà ông đã là một nhà toán học nổi tiếng, Poincaré viết những cuốn sách về toán học được mọi người rất ưa thích. Bạn đọc ở mọi lứa tuổi đều đọc những cuốn sách này và có thể nhìn thấy những cuốn sách ấy thường được người ta đọc trong các quán cà phê cũng như trong các công viên ở Paris.

Poincaré sinh ra trong gia đình của những người rất thành đạt. Người anh em họ của ông, Raymond Poincaré, đã trở thành tổng thống nước Pháp trong thời kỳ chiến tranh thế giới thứ nhất. Các thành viên khác trong gia đình cũng đã nắm giữ các chức vụ trong Chính phủ và Nhà nước Pháp.

Từ khi còn trẻ, Henri tỏ ra có trí nhớ tuyệt vời. Ông có thể kể lại bất cứ trang nào trong cuốn sách ông đã đọc. Tuy nhiên, tính lơ đãng của ông thì cũng như truyền thuyết vậy. Có một lần, một nhà toán học Phần Lan đã cất công đến Paris mong gặp Poincaré để thảo luận một số vấn đề toán học. Vị khách phải chờ suốt ba giờ ở phòng đợi bên cạnh phòng làm việc của Poincaré, trong khi nhà toán học đăng trí đi đi lại lại - một thói quen trong suốt cả cuộc đời làm việc của ông. Cuối cùng Poincaré bất thành linh ngó sang phòng đợi và la lên: "Thưa ngài, ngài đang quấy rầy tôi đấy!". Đến nước ấy thì vị khách chỉ còn cách bỏ đi và không bao giờ trở lại Paris nữa.

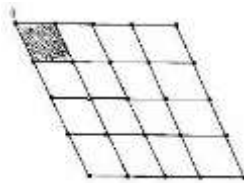
Tài năng lỗi lạc của Poincaré bộc lộ rõ ngay từ khi ông còn học ở trường tiểu học. Nhưng vì phong cách của một người đa tài - một chàng trai thời kỳ Phục Hưng đang hình thành - năng khiếu toán học đặc biệt của ông vẫn chưa bộc lộ rõ nét. Từ tuổi ấu thơ, ông đã nổi bật lên vì khả năng xuất sắc của mình trong viết lách. Một nhà giáo, người đã nhận thấy và khuyến khích tài năng của ông, đã trân trọng giữ gìn các bài luận của ông hồi học ở trường. Tuy nhiên, về một mặt nào đó, người thầy này đã phải cảnh tỉnh thiên tài trẻ tuổi: "Không nên làm cái gì cũng quá tuyệt vời. Hãy cố làm một người bình thường thôi". Người thầy có lý do chính đáng khi đưa ra lời khuyên này. Rõ ràng, các nhà giáo dục Pháp đã rút ra được điều gì đây qua nỗi bất hạnh của Galois từ nửa thế kỷ trước: những sinh viên có tài thường hỏng thi bởi những người giám khảo tầm thường. Người thầy của ông đã lo lắng rất đúng rằng Poincaré quá xuất chúng đến nỗi ông có thể bị trượt trong những kỳ thi như thế. Poincaré vốn tính lơ đãng ngay từ khi còn bé. Ông thường bỏ bữa vì không nhớ là mình ăn rồi hay chưa.

Cậu bé Poincaré rất thích văn học cổ điển và đã tập viết sao cho thật hay. Khi là một thiếu niên, Poincaré đã quan tâm đến môn toán và tức thì trội hẳn về môn này. Trong khi đi đi lại lại trong phòng, ông có thể giải các bài toán ở trong đầu - sau đó ngồi xuống và viết ra rất nhanh toàn bộ lời giải. Về điểm này, ông giống như Galois và Euler. Khi Poincaré thi tốt nghiệp phổ thông, ông suýt trượt môn toán, đúng như người thầy của ông hồi ở trường tiểu học đã lo ngại từ mấy năm trước. Nhưng ông đã đỗ, chỉ vì ở tuổi mười bảy tiếng tăm của ông như là một nhà toán học đã quá lẫy lừng đến nỗi ban giám khảo không dám đánh trượt ông. "Một học sinh nào đó nếu không phải là Poincaré thì sẽ bị trượt", ông trưởng ban giám khảo đã nói như vậy khi cho điểm đỗ cho cậu học sinh, người mà sau này đã tiếp tục học lên Trường Đại học Bách khoa và trở thành nhà toán học Pháp vĩ đại nhất thời kỳ đó.

Poincaré viết nhiều sách về toán học, vật lý toán, thiên văn học và khoa học thường thức. Ông cũng viết nhiều bài báo nghiên cứu với tổng số trên năm trăm trang về các vấn đề toán học do ông phát triển. Ông có những đóng góp cơ bản cho tôpô học - một lĩnh vực do Euler khởi xướng. Hơn thế nữa, các kết quả của Poincaré còn quan trọng đến nỗi ngành toán học này chỉ được xem là thực sự bắt đầu vào năm 1895 cùng với việc xuất bản cuốn "*Analysis Situs*" của Poincaré. Tôpô học, một ngành nghiên cứu các hình, các mặt và các hàm liên tục, có vai trò quan trọng trong việc tìm hiểu bài toán Fermat vào những năm cuối thế kỷ XX. Nhưng một lĩnh vực khác do Poincaré khởi xướng thậm chí còn là yếu tố cần thiết hơn cho việc tiếp cận hiện đại Định lý cuối cùng của Fermat.

Các dạng modula

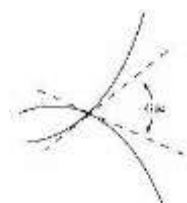
Poincaré nghiên cứu các hàm tuần hoàn, chẳng hạn như các hàm sin và cosin của Fourier, nhưng không phải trên trục số như Fourier mà trên mặt phẳng phức. Hàm $\sin x$ là độ cao thẳng đứng trên đường tròn có bán kính bằng 1 khi góc tương ứng là x . Hàm số này là tuần hoàn: nó lặp đi lặp lại mãi mãi mỗi khi góc x bổ sung thêm một bội của chu kỳ của nó, 360 độ. Tính tuần hoàn này là đối xứng. Poincaré đã khảo sát mặt phẳng phức bao gồm các số thực trên trục hoành và các số ảo trên trục tung, như ở hình 14.



Hình 14

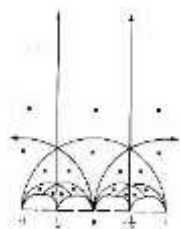
Ở đây, hàm tuần hoàn có thể được hiểu là có tính tuần hoàn cả theo trục thực và cả theo trục ảo. Thậm chí Poincaré còn đi xa hơn khi thừa nhận sự tồn tại của các hàm số có tính chất đối xứng rộng rãi hơn. Đây là những hàm không thay đổi khi biến phức z thay đổi theo quy tắc $f(z) \rightarrow f(az+b/cz+d)$, trong đó các phần tử a, b, c, d được sắp xếp thành một ma trận, lập nên một nhóm đại số. Điều này nghĩa là có nhiều vô hạn các biến đổi có thể. Chúng giao hoán với nhau và hàm f là bất biến đối với nhóm các phép biến đổi này. Poincaré gọi các hàm đặc biệt đó là các dạng tự đẳng cấu.

Các dạng tự đẳng cấu là những dạng hết sức kỳ lạ vì chúng thỏa mãn nhiều tính chất đối xứng trong. Poincaré không dám chắc là chúng tồn tại. Thực tế, Poincaré đã mô tả việc nghiên cứu của ông thế này. Ông nói rằng suốt mười lăm ngày ông thức dậy vào buổi sáng và ngồi tại bàn làm việc liên vài giờ cố gắng tự thuyết phục mình rằng các dạng tự đẳng cấu mà ông đã phát minh ra không thể tồn tại. Đến ngày thứ mười lăm ông nhận ra rằng ông đã sai. Các hàm kỳ lạ này dù khó mà hình dung được bằng mắt nhưng chúng tồn tại thực sự. Poincaré đã mở rộng chúng thành các hàm phức tạp hơn, gọi là các dạng modula. Các dạng modula tồn tại ở nửa phía trên của mặt phẳng phức và đồ thị của chúng có dạng hyperbolic. Tức là chúng tồn tại ở trong một không gian kỳ lạ, nơi hình học phi Euclid của Bolyai và Lobachevsky chế ngự. Qua một điểm bất kỳ thuộc nửa mặt phẳng này tồn tại nhiều "đường thẳng" song song với một đường thẳng tùy ý cho trước (hình 15).



Hình 15

Các dạng modula rất kỳ lạ này là đối xứng theo nhiều cách trong không gian đó. Các phép đối xứng nhận được bằng các phép tịnh tiến và lấy nghịch đảo $1/z$. Dưới đây là minh họa "phép lợp ngói" nửa mặt phẳng phức nhờ sử dụng các phép đối xứng này (hình 16).



Hình 16

Poincaré đã gạt bỏ sang một bên các dạng tự đẳng cấu đối xứng và ngay cả các dạng modula phức tạp hơn của chúng để tiếp tục nghiên cứu các vấn đề toán học khác. Ông bận rộn với quá nhiều lĩnh vực, thường thường ông nghiên cứu vài lĩnh vực cùng một lúc, đến nỗi ông không có thời gian để ngồi lại suy ngẫm về cái đẹp của các thực thể đối xứng vô hạn khó hình dung nổi ấy. Nhưng chính ông cũng không biết được là mình đã gieo cả hạt giống khác vào mảnh vườn để rồi chính những hạt giống này lại dẫn đến lời giải bài toán Fermat.

Một sự liên quan bất ngờ với cái bánh vùng vòng

Năm 1922, nhà toán học người Anh là Louis J. Mordell đã phát hiện thấy một điều mà ông cho là có sự liên quan rất kỳ lạ giữa các nghiệm của phương trình đại số và tô pô học. Các thành tố của tô pô học là các mặt và các không gian. Các mặt này có thể nhúng trong không gian ba chiều như các hình trong hình học Hy Lạp cổ đại hoặc không gian bốn chiều hay nhiều chiều hơn nữa. Tô pô học nghiên cứu các hàm liên tục xác định trên các không gian này cũng như các tính chất của chính các không gian đó. Mordell nghiên cứu tô pô của các mặt trong không gian ba chiều. Một ví dụ đơn giản về loại mặt như vậy là mặt cầu: đó là mặt của trái bóng, như trái bóng rổ chẳng hạn. Trái bóng là một vật thể ba chiều nhưng bề mặt của nó (xem như không có bề dày) là vật thể hai chiều. Bề mặt Trái Đất là một ví dụ khác. Bản thân Trái Đất là loại hình ba chiều: một vị trí nào đó trên Trái Đất hoặc bên trong nó đều có thể xác định bởi kinh độ của nó (chiều thứ nhất), vĩ độ của nó (chiều thứ hai) và độ sâu của nó (chiều thứ ba). Nhưng bề mặt Trái Đất (không có bề dày) là hai chiều vì một điểm bất kỳ trên mặt Trái Đất có thể được chỉ ra nhờ hai giá trị: kinh độ và vĩ độ của nó.

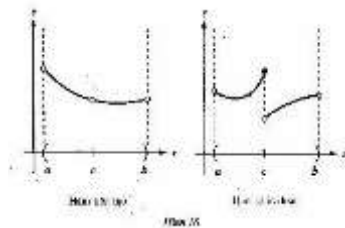
Các mặt hai chiều trong không gian ba chiều có thể được phân loại theo "giống" của chúng. Giống của một mặt chính là số lượng các lỗ hổng trên mặt đó. Giống của mặt cầu là 0, vì nó không có lỗ hổng nào. Bánh vùng vòng (theo ngôn ngữ toán học là hình xuyên) có một lỗ hổng, do đó giống của nó là 1. Lỗ hổng là lỗ đi xuyên qua hoàn toàn mặt. Cái tách với hai quai có hai lỗ hổng xuyên qua. Do đó, nó là một mặt có giống 2 (hình 17).



Hình 17

Một mặt có thể biến đổi thành một mặt khác có cùng giống nhờ một biến đổi liên tục. Chỉ có duy nhất một cách để biến đổi mặt thuộc giống này thành mặt thuộc giống khác là đóng lại hoặc mở ra một số lỗ hổng. Điều này không thể thực hiện được một cách liên tục, vì ở đây cần phải xé thủng mặt đó ra hoặc nối liền lại, song mỗi việc làm như thế là một sự gián đoạn toán học (hình 18).

Mordell đã phát hiện ra mối liên hệ hoàn toàn bất ngờ và kỳ lạ giữa số lỗ hổng (giống) trên mặt cong gồm các nghiệm của một phương trình và việc phương trình đó có một số hữu hạn hay vô hạn nghiệm. Nếu mặt cong gồm các nghiệm (xét trên trường số phức cho tổng quát nhất) có hai lỗ hổng hoặc nhiều hơn (tức là, mặt có giống 2 hoặc lớn hơn), thì phương trình này chỉ có một số hữu hạn nghiệm nguyên. Mordell không chứng minh được phát hiện của mình và sau này nó được gọi là giả thuyết Mordell.



Hình 18

Chứng minh của Faltings

Năm 1983, nhà toán học hai mươi bảy tuổi người Đức Gerd Faltings của Trường Đại học Tổng hợp Wuppertal đã chứng minh giả thuyết Mordell. Faltings không quan tâm đến Định lý cuối cùng của Fermat, xem nó như một bài toán biệt lập của lý thuyết số. Tuy nhiên, chứng minh rất độc đáo của ông bằng công cụ cực mạnh của hình học đại số phát triển trong thế kỷ này đã cho thấy những mối liên hệ sâu sắc với hiện trạng của Định lý cuối cùng của Fermat. Vì phương trình Fermat với n lớn hơn 3 có giống lớn hơn hay bằng 2, cho nên rõ ràng rằng nếu các nghiệm nguyên của phương trình Fermat tồn tại thì số các nghiệm này là hữu hạn (điều này phần nào an ủi chúng ta vì số nghiệm của phương trình Fermat, theo

khẳng định này, là hữu hạn). Không lâu sau, hai nhà toán học Granville và Heath-Brown đã sử dụng kết quả của Faltings để chỉ ra rằng, số nghiệm của phương trình Fermat (nếu tồn tại) sẽ giảm khi lũy thừa n tăng. Điều này cho thấy rằng tỷ lệ các lũy thừa mà với chúng Định lý cuối cùng của Fermat là đúng, xấp xỉ một trăm phần trăm khi n tăng.

Nói cách khác, Định lý cuối cùng của Fermat là "gần như luôn luôn" đúng. Nếu nghiệm của phương trình Fermat tồn tại (trong trường hợp Định lý cuối cùng của Fermat là sai) thì các nghiệm như thế là ít và cách rất xa nhau. Như vậy, tình trạng của Định lý cuối cùng của Fermat vào năm 1983 là như sau: Định lý đã được chứng minh với mọi n nhỏ hơn hay bằng 1 triệu (và vào năm 1992 giới hạn này đã được nâng lên tới 4 triệu); ngoài ra, với n lớn hơn nữa, nếu các nghiệm tồn tại thì cũng rất ít và số nghiệm giảm khi n tăng.

Vị tướng Hy Lạp huyền bí mang cái tên khô hạn Có tới hàng tá cuốn sách tuyệt vời về toán học viết bằng tiếng Pháp được xuất bản ở Pháp với tên tác giả là Nicolas Bourbaki và cũng có một vị tướng người Hy Lạp tên là Bourbaki (1816-1897). Năm 1862 người ta đã muốn tôn Bourbaki lên làm vua Hy Lạp, nhưng ông đã từ chối. Vị tướng này có vai trò quan trọng trong cuộc chiến tranh Pháp-Phổ và ở Pháp người ta đã dựng tượng ông tại thành phố Nancy. Nhưng tướng Bourbaki không biết gì về toán học cả. Ông cũng chẳng bao giờ viết sách về toán học hay bất kỳ lĩnh vực nào khác. Vậy ai đã viết những tuyển tập toán học mang tên ông ?

Câu trả lời là ở những ngày hòa bình tại Paris giữa hai cuộc chiến tranh thế giới, Hemingway, Picasso và Matisse không phải là những người duy nhất thích ngồi trong các quán cà phê gặp gỡ bạn bè mình, nhìn ngắm mọi người và được người ta để ý đến mình. Hồi bấy giờ, xung quanh các quán cà phê giống giống nhau ở vùng bên trái sông Xen gần Trường Đại học Tổng hợp Paris, có một cộng đồng toán học đầy nhiệt huyết đang hoạt động rất sôi nổi. Các giáo sư toán học của Trường Đại học Tổng hợp Paris cũng thích gặp mặt bạn bè của họ, uống một tách cà phê sữa hay một ly rượu trong một cái quán trên phố St. Michel gần khu vườn Luxembourg xinh đẹp, và tranh luận ... toán học. Mùa xuân ở Paris mang lại cảm hứng cho các nhà văn, các nghệ sĩ và các nhà toán học. Người ta hình dung một ngày chủ nhật nắng đẹp, tại một quán cà phê thú vị, một nhóm ồn ào các nhà toán học đang tụ họp. Những tình cảm anh em bè bạn luôn chiến thắng mỗi khi họ tranh cãi sôi nổi về những điểm hay nào đó của một lý thuyết. Cuộc vui ồn ã của họ có lẽ đã làm phiền đến Hemingway, người từng viết rằng ông chỉ thích làm việc một mình tại quán cà phê và có lẽ ông sẽ rời đến một trong những nơi ông thường lui tới, những tụ điểm ít được ưa thích. Nhưng các nhà toán học đã không để tâm đến điều đó. Họ quý trọng bạn bè của mỗi người và quán cà phê chật ních các nhà toán học - tất cả nói cùng một thứ ngôn ngữ các con số, các ký hiệu, các

không gian và các hàm số - đang tràn đầy niềm say sưa. "Không khí như thế này hẳn các môn đệ của Pythagoras cũng đã cảm thấy mỗi khi họ luận bàn toán học", có lẽ một người già dặn hơn trong nhóm đã nói khi ông ta nâng ly rượu mừng. "Đúng thế, nhưng họ không uống Pernod", một người khác nói và mọi người cùng cười phá lên. "Nhưng mà chúng ta cũng có thể giống họ", người cao tuổi đáp lại. "Tại sao chúng ta không thành lập một hội riêng của ta nhỉ? Đương nhiên là một hội kín ấy". Khắp nơi rộ lên lời tán thưởng. Một người đề nghị họ mượn tên của vị tướng già Bourbaki. Lời đề nghị này có lý do của nó. Vào thời ấy, Khoa Toán Trường Đại học Tổng hợp Paris có truyền thống hàng năm mời một diễn viên chuyên nghiệp biểu diễn vai Nicolas Bourbaki cho tập thể cán bộ giảng dạy và nghiên cứu sinh xem. Sau đó, một mình diễn viên này trình bày tiết mục độc thoại rất dài về những thuật ngữ toán học nước đôi. Những tiết mục trình diễn như thế rất thú vị vì sự phong phú của lý thuyết toán học hiện đại đã tạo nên một nguồn từ vựng dồi dào vừa mang ý nghĩa toán học lại vừa có những nghĩa khác trong cuộc sống hàng ngày. Một trong số các từ như vậy là "dense". Người ta nói rằng các số hữu tỷ phân bố dày đặc (dense) trong các số thực. Điều này có nghĩa là trong một lân cận bất kỳ của các số hữu tỷ đều có các số vô tỷ (ở đây có thể tác giả đã nói hơi ngược - lời người dịch). Nhưng "dense" còn mang nhiều nghĩa khác trong cuộc sống thường ngày.

Ngày nay, các nghiên cứu sinh thích trò chơi chữ hai nghĩa như vậy. Họ thích kể câu chuyện nàng Poly Nomial xinh đẹp gặp nhà giải phẫu lành nghề Curly Pi (polynomial = đa thức, nhà giải phẫu lành nghề = smooth operator = toán tử trơn, curly pi = pi xoắn - tất cả các từ đều là các thuật ngữ toán học).

Vậy là những cuốn sách mang cái tên Nicolas Bourbaki chính là do các nhà toán học nói trên cùng nhau viết ra. Người ta đã khởi xướng xêmina Bourbaki, nơi mà các lý thuyết và các ý tưởng toán học được thảo luận rất thường xuyên. Các hội viên đều phải giấu tên, các kết quả toán học phải được công nhận là của hội và mang tên Bourbaki chứ không được mang tên riêng của hội viên.

Nhưng hội viên Bourbaki không giống như môn đồ của Pythagoras. Mặc dù tác giả các cuốn sách là Nicolas Bourbaki, nhưng các kết quả nghiên cứu, ví dụ như các định lý và chứng minh của chúng - những điều đáng giá hơn các cuốn sách rất nhiều - vẫn được thừa nhận là của riêng hội viên đã đạt được các kết quả đó. Một trong những hội viên đầu tiên của hội Bourbaki là André Weil (sinh năm 1906), người sau này đã chuyển đến Viện Nghiên cứu cao cấp ở Princeton thuộc Hoa Kỳ. Tên tuổi của ông luôn gắn liền với một giả thuyết quan trọng dẫn đến lời giải bài toán Fermat. Một trong những người sáng lập Hội Bourbaki là nhà toán học Pháp Jean Dieudonné. Dieudonné là người cũng giống như các hội viên người Pháp khác đã chuyển đến "những mảnh đất tốt hơn" trong các trường đại học Hoa Kỳ. Dieudonné - tác giả chính của nhiều cuốn sách mang cái tên chung Nicolas Bourbaki - là hình ảnh thu nhỏ của mỗi mâu thuẫn trong nội bộ hội viên Bourbaki giữa việc giấu tên cá

nhân và cái "tôi" của từng người. Một lần, Dieudonné công bố bài báo mang tên Bourbaki. Bài báo này có sai sót và thế là Dieudonné đăng phần chú giải có tiêu đề "Về sai sót của N. Bourbaki" rồi ký tên là J. Dieudonné[\[11\]](#).

Nguyên nhân tan rã tất yếu của hội có tất cả hội viên đều là người Pháp nhưng đa số sống ở Hoa Kỳ này tự bộc phát trong việc xác định tư cách tác giả của ngài Bourbaki. Thường thường các ấn phẩm của Nicolas Bourbaki ghi nguồn gốc của nó là "Trường Đại học Tổng hợp Nancago" - một hình thức kết hợp tên thành phố Nancy của Pháp với thành phố Chicago của Hoa Kỳ. Nhưng Bourbaki chỉ in sách bằng tiếng Pháp, và khi các hội viên gặp nhau - thường là tại một thành phố nghỉ mát của Pháp - họ đàm luận không chỉ bằng tiếng Pháp mà dùng cả ngôn ngữ lóng của sinh viên Paris. Chủ nghĩa sô-vanh thâm nhập vào cuộc sống của các nhà toán học Pháp sống tại Hoa Kỳ. André Weil, một hội viên sáng lập Hội Bourbaki, đã công bố nhiều bài báo quan trọng bằng tiếng Anh. Nhưng "*Tuyển tập công trình*" [\[12\]](#) của ông ta - trong đó đề cập vài điểm về giả thuyết có quan hệ với bài toán Fermat - đã được xuất bản bằng tiếng Pháp với tựa đề "Oeuvres" (Các công trình). Những hành động không bình thường của Weil có thể đã xúc phạm đến một trong các nhân vật chính trong vở kịch của chúng ta và Weil không thể trở lại bình thường được sau sự việc đổ bể này.

Các hội viên Bourbaki cần phải được công nhận là có tính hài hước tập thể. Khoảng bốn mươi năm trước, Hội Toán học Hoa Kỳ đã nhận được một lá đơn xin làm hội viên với tư cách cá nhân của ngài Nicolas Bourbaki. Thư ký của Hội đã không hề bối rối. Ông ta phúc đáp rằng nếu ngài Bourbaki muốn vào Hội thì phải làm đơn đăng ký hội viên với tư cách cơ quan (lệ phí hội viên dạng này đắt hơn nhiều). Bourbaki không hồi âm trở lại nữa.

Các đường cong elliptic

Các bài toán Diophantine - tức là các bài toán nảy sinh từ các phương trình có dạng mà Diophantus đưa ra từ thế kỷ III - đã bắt đầu được nghiên cứu ngày một nhiều hơn trong thế kỷ XX bằng việc sử dụng các công cụ toán học được gọi là các đường cong elliptic. Nhưng các đường cong elliptic chẳng có gì gần với hình ellip cả. Từ những thế kỷ trước, ban đầu chúng được sử dụng trong mối liên quan đến các hàm elliptic, mà những hàm này đã được tạo ra để tính chu vi của hình ellip. Cũng như đối với nhiều ý tưởng sáng tạo khác trong toán học, người đi tiên phong trong lĩnh vực này không phải là ai khác ngoài Gauss.

Thật kỳ quặc, các đường cong elliptic không liên quan gì đến các hình ellip và cũng chẳng phải là các hàm elliptic mà chúng là các đa thức bậc ba của hai biến. Ví dụ, chúng có dạng: $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx$, trong đó a, b, c là các số nguyên hoặc các số hữu tỷ (chúng ta quan tâm tới các đường cong elliptic trên các số hữu tỷ). Những ví dụ về các đường cong elliptic đó sẽ được minh họa ở hình 19. [13]



Hình 19

Khi người ta xét các điểm hữu tỷ trên đường cong elliptic, tức là chỉ xét các điểm trên đường cong mà các tọa độ của nó là tỷ số của hai số nguyên (không phải các số vô tỷ như số pi hay căn bậc hai của 2, v.v...), thì các số này tạo thành một nhóm. Điều đó có nghĩa là chúng có những tính chất thú vị. Hãy lấy hai nghiệm bất kỳ; chúng có thể được "cộng" vào theo một nghĩa nào đó để tạo ra một nghiệm thứ ba trên đường cong. Các đường cong elliptic đã trở nên cuốn hút đối với các nhà lý thuyết số vì chúng có thể trả lời nhiều câu hỏi về phương trình và nghiệm của phương trình. Vì vậy, các đường cong elliptic đã trở thành một trong số các công cụ nghiên cứu tốt nhất trong lý thuyết số. [14]

Một giả thuyết kỳ lạ sắp được đưa ra

Một thời các chuyên gia lý thuyết số đã nhận ra rằng một số đường cong elliptic mà họ đang nghiên cứu là các dạng modula. Tức là, những đường cong elliptic này có thể được xem là có liên quan đến các dạng modula. Một số đường cong elliptic có thể có liên quan như thế nào đó đến mặt phẳng phức và các hàm. trong không gian hyperbolic cùng với nhiều tính chất đối xứng của chúng. Người ta không thật rõ tại sao điều này lại xảy ra và xảy ra như thế nào. Ngay cả với các nhà chuyên môn, toán học thật vô cùng phức tạp, cái cấu trúc bên trong của nó với những sự hài hòa tuyệt vời vốn có lại mới chỉ được hiểu biết rất ít. Các hàm

elliptic mà thực chất là các dạng modula có những tính chất thú vị. Chẳng bao lâu sau đã có người đưa ra một giả thuyết táo bạo rằng tất cả các hàm elliptic là các dạng modula.

Để hiểu ý tưởng về tính modula, điều tồn tại trong không gian phi Euclid của nửa trên của mặt phẳng phức, nơi mà tính đối xứng hết sức phức tạp đến nỗi người ta khó có thể hình dung nổi, thì việc xét một ví dụ thật đơn giản sẽ rất có ích. Đây là một ví dụ mà đường cong ta quan tâm không phải là đường cong elliptic; thay cho phương trình bậc ba có hai biến là phương trình bậc hai có hai biến: đường cong này là một đường tròn đơn giản. Phương trình của đường tròn có bán kính a với tâm ở 0 là $x^2 + y^2 = a^2$. Bây giờ, hãy xét các hàm tuần hoàn đơn giản: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. Hai hàm này có thể thay cho x và y trong phương trình của đường tròn. Theo nghĩa này, phương trình của đường tròn có dạng modula. Lý do là đồng nhất thức lượng giác khẳng định rằng: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, và thay thế công thức này vào phương trình của đường tròn (nhân mỗi số hạng với a) ta sẽ nhận được một đồng nhất thức.

Đường cong elliptic modula chính là sự mở rộng ý tưởng này sang mặt phẳng phức phức tạp hơn gắn với hình học phi Euclid đặc biệt. Ở đây các hàm tuần hoàn là đối xứng không chỉ đối với một biến t như với các hàm sin và cosin trên đường thẳng số mà chúng còn là tự đẳng cấu, hay là dạng modula trên mặt phẳng phức có tính đối xứng đối với các phép biến đổi phức tạp hơn ($f(z) \rightarrow f(az+b/cz+d)$).

Tôkyô, Nhật Bản, đầu thập niên 1950

Vào đầu thập niên 1950, Nhật Bản là một quốc gia đang vươn lên từ đống tro tàn của cuộc chiến tranh. Dân chúng không phải chịu cảnh đói khát kéo dài nữa, nhưng họ vẫn còn nghèo và việc duy trì cuộc sống thường ngày vẫn đang là một cuộc đấu tranh đối với thường dân Nhật Bản. Các nhà máy đang được xây dựng lại từ những đồng gạch vụn, các doanh nghiệp được tái thiết và tâm trạng chung là đầy hy vọng.



Yukata Taniyama

Vào thời kỳ này, cuộc sống trong các trường đại học của Nhật Bản cũng rất khó khăn. Sự cạnh tranh giữa sinh viên với nhau diễn ra rất gay gắt: đạt điểm cao đồng nghĩa với có việc làm tốt sau khi tốt nghiệp. Đặc biệt, điều này rất đúng đối với các nghiên cứu sinh toán học lý thuyết vì tìm được chỗ làm việc tại các trường đại học là rất khó dù rằng lương ở đó thấp.

Yutaka Taniyama là một trong những nghiên cứu sinh toán như vậy. Ông sinh ngày 12 tháng 11 năm 1927 và là con út trong số tám người con của một gia đình bác sĩ nông thôn ở thị trấn Kisai - cách Tôkyô chừng 30 dặm về phía Bắc. Thời trẻ, Taniyama bắt đầu nghiên cứu toán học, trong đó có phép nhân phức của các đa tạp abel. Lĩnh vực này còn ít được biết đến và Taniyama đã trải qua một thời kỳ rất khó khăn. Ông đã xin ý kiến tư vấn của các giáo sư cao tuổi ở Trường Đại học Tổng hợp Tôkyô nhưng tiếc rằng ý kiến của họ chẳng có ích lợi gì mà chỉ làm cho công việc của ông khó khăn hơn. Ông đã phải tự mình tìm tòi từng chi tiết và ông thường mô tả công việc nghiên cứu toán học của mình bằng các chữ Hán có nghĩa là "cuộc chiến đấu gian khổ" và "trận chiến quyết liệt". Cuộc sống của chàng trai Yutaka Taniyama trẻ tuổi chẳng có gì dễ dàng cả.

Taniyama ở trong căn hộ chỉ có một phòng với diện tích 81 fit vuông (tức là $7,29\text{m}^2$, ND) của một tòa nhà mà mỗi tầng chỉ có một phòng vệ sinh chung. Muốn tắm giặt, Taniyama phải đến nhà tắm công cộng cách đây vài quãng đường. Người ta gọi cái tòa nhà cũ nát ấy một cách mỉa mai là "Ngôi biệt thự yên tĩnh trên núi" vì tòa nhà này nằm ở một phố đông đúc bên cạnh đường tàu hỏa mà cứ vài phút lại có tiếng gầm rít của động cơ tàu hỏa. Có lẽ chính vì vậy mà để có thể tập trung nghiên cứu tốt hơn, chàng trai Yutaka hầu như làm việc vào ban đêm và thường đi ngủ lúc sáu giờ sáng khi một ngày ồn ã lại bắt đầu. Trừ những ngày hè nóng nực, hầu như ngày nào Taniyama cũng diện một bộ quần áo xanh sáng có những chiếc khuy bằng kim loại bóng loáng. Ông từng phân trần với người bạn thân của mình là Goro Shimura rằng, cha ông mua thứ vải này với giá rất rẻ của người bán hàng rong, nhưng vì vải sáng màu quá nên chẳng ai trong gia đình dám mặc. Yutaka, một người chẳng để ý đến hình thức của mình, cuối cùng đã tình nguyện lấy mảnh vải đó may bộ quần áo và nó đã trở thành bộ "tủ" hàng ngày của ông.



Goro Shimura vào khoảng năm 1965
khi ông lần đầu tiên nêu giả thuyết của mình.

Taniyama tốt nghiệp Đại học Tổng hợp Tôkyô năm 1953 và được giữ lại làm "sinh viên nghiên cứu đặc biệt" (hay "nghiên cứu sinh đặc biệt") của Khoa Toán trường này. Shimura, bạn của ông, tốt nghiệp trước ông một năm và cũng đạt được vị trí tương tự tại Khoa Toán Trường Đại học Đại cương nằm ngay gần Trường Đại học Tổng hợp Tôkyô. Tình bạn của họ bắt đầu khi một trong hai người viết thư cho người kia đề nghị trả cho thư viện một cuốn tạp chí toán học mà cả hai cùng quan tâm. Họ thường ăn với nhau tại một quán ăn bình dân có các món ăn kiểu phương Tây, ví dụ như món lưỡi hằm đang hợp khẩu vị người Nhật lúc bấy giờ.[\[15\]](#)



Trên chuyến tàu đến Nikko dự hội nghị năm 1995
Từ trái sang phải : T. Tamagawa, J.P.Serre, Y. Taniyama, A.Weil

Hồi đó, ít nhà toán học giỏi ở lại Nhật Bản. Khi một nhà toán học nào đó trở thành nổi tiếng, người ấy sẽ cố chuyển đến một trường đại học ở Hoa Kỳ hoặc ở châu Âu, nơi mà cộng đồng toán học đã có uy tín hơn và khả năng liên hệ với những người đang nghiên cứu cùng lĩnh vực được thực hiện dễ dàng. Mỗi liên kết như vậy rất quan trọng trong việc nghiên cứu các lĩnh vực huyền bí chưa được biết đến nhiều lắm. Nhằm cố gắng phát triển mối quan hệ nghiên cứu với những người có hiểu biết về lĩnh vực mình quan tâm, đôi bạn này đã góp phần tham gia tổ chức Hội nghị chuyên đề Tôkyô-Nikko về Lý thuyết số đại số vào tháng 9 năm 1955. Một vài khẳng định đã được đưa ra tại hội nghị nhỏ này, song suốt một thời gian dài sau đó chúng vẫn không được ai biết đến. Cuối cùng, gần bốn chục năm sau, chính chúng đã dẫn tới các kết quả quan trọng và cũng gây tranh cãi vô cùng gay gắt.

Một sự khởi đầu đầy hứa hẹn

Hai người bạn (Y. Taniyama và G. Shimura) đã đề đạt với chính quyền, chuẩn bị những điều kiện thuận lợi cho hội nghị, gửi giấy mời cho các nhà toán học trong và ngoài nước mà họ hy vọng sẽ đến dự hội nghị. André Weil, người mà khi đó đã rời nước Pháp sang làm giáo sư tại Trường Đại học Tổng hợp Chicago, là một trong số những người được mời dự. Năm năm trước đó, tại Hội nghị Toán học Quốc tế, Weil đã làm cho cả cộng đồng toán học chú ý đến một giả thuyết chưa được biết do một nhà toán học có tên là Hasse đề xuất về "Hàm zeta của đa tạp trên một trường số". Cái mệnh đề khó hiểu này đã gây được sự chú ý cho các nhà nghiên cứu lý thuyết số. Rõ ràng, Weil đang tập hợp các ý tưởng giả định này trong lý thuyết số, bao gồm cả giả thuyết nêu trên, vào cuốn "*Các bài báo sưu tập*" của ông để ghi nhận đóng góp của Hasse.

Sự quan tâm của Weil đến các kết quả trong lĩnh vực lý thuyết số đã làm cho Taniyama và Shimura rất chú ý tới ông và họ rất vui mừng khi ông nhận lời mời tham dự hội nghị. Một người khác cũng đến dự Hội nghị Tôkyô-Nikko là nhà toán học trẻ người Pháp tên là Jean-Pierre Serre. Mặc dù khi đó có thể ông chưa phải là hội viên Bourbaki, vì Hội Bourbaki chỉ kết nạp các nhà toán học có tên tuổi, nhưng ông sẽ trở nên nổi tiếng trong vòng vài chục năm sau. Một số nhà toán học đã miêu tả Serre là một người có hoài bão và tính cách đua tranh quyết liệt. Ông đến với Tôkyô- Nikko để tìm hiểu thêm được càng nhiều càng tốt. Người Nhật Bản nắm được một số vấn đề về lý thuyết số và họ đã có nhiều kết quả được công bố nhưng chỉ bằng tiếng Nhật nên vẫn chưa được thế giới biết đến. Lần này là một cơ hội tốt để tìm hiểu các kết quả đó vì ngôn ngữ của hội nghị là tiếng Anh. Ông là một trong số ít người ngoại quốc có trình độ về toán học có mặt tại hội nghị. Sau đó kỷ yếu của hội nghị khoa học này chỉ được công bố bằng tiếng Nhật. Hai mươi năm sau, Serre đã lưu ý đến một vài sự kiện ở Hội nghị Tôkyô-Nikko và thế giới có thể biết đến bản thuật lại kết quả hội nghị của ông chứ không phải kỷ yếu hội nghị bằng tiếng Nhật.

Tập kỷ yếu ghi kết quả hội nghị đó bao gồm 36 vấn đề. Vấn đề 10, 11 , 12, 13 do Yutaka Taniyama viết. Tương tự như các ý tưởng của Hasse, các vấn đề của Taniyama cấu thành một giả thuyết về các hàm zeta. Dường như ông đã tìm ra được mối liên hệ giữa các hàm tự đẳng cấu của Poincaré trên mặt phẳng phức với hàm zeta trên đường cong elliptic. Thật khó hiểu là vì sao đường cong elliptic lại liên quan đến một cái gì đó trên mặt phẳng phức.

"Anh đang nói gì...?"

Cái giả thuyết ẩn chứa trong bốn vấn đề của Taniyama là rất mờ nhạt. Taniyama đã không trình bày các vấn đề một cách rõ nghĩa vì có thể là ông không dám khẳng định chắc chắn mối liên hệ đó là cái gì. Nhưng ý tưởng cơ bản lại nằm ở đây. Theo trực giác và cảm giác thì các hàm tự đẳng cấu cùng với nhiều tính đối xứng của chúng trên mặt phẳng phức có liên hệ nào đó với các phương trình Diophantine. Điều này, tất nhiên không dễ gì thấy được. Taniyama đã tìm ra mối liên hệ ngầm giữa hai ngành toán học rất khác nhau.

André Weil muốn biết chính xác những điều mà Taniyama đã nghĩ. Theo biên bản của hội nghị, tức là tập kỷ yếu đã được công bố bằng tiếng Nhật, một cuộc trao đổi đã diễn ra giữa Weil và Taniyama như sau: [\[16\]](#)

Weil: *Anh có cho rằng tất cả các hàm elliptic được "đều hóa" bởi các hàm modula?*

Taniyama: *Chỉ các hàm modula không thôi thì sẽ không đủ. Tôi nghĩ là cần có cả các dạng đặc biệt khác của các hàm tự đẳng cấu.*

Weil: *Tất nhiên, có lẽ đối với một số hàm có thể vận dụng được phương pháp đó. Nhưng trong trường hợp tổng quát, chúng tỏ ra khác nhau hoàn toàn và rất kỳ lạ...*

Có hai vấn đề dễ nhận thấy từ cuộc hội thoại trên. Thứ nhất, Taniyama thiên về "các hàm tự đẳng cấu" hơn là "chỉ các hàm modula" trong mối quan hệ với các đường cong elliptic. Thứ hai, Weil không tin rằng trong trường hợp tổng quát lại có mối liên hệ như vậy. Sau này ông đã thể hiện rõ hơn sự nghi ngờ này, song tất cả điều đó làm mọi người ngạc nhiên vì rằng cuối cùng tên của ông lại gắn liền với cái giả thuyết mà ông chưa bao giờ đặt ra và thậm chí còn không tin là nó đúng. Nhưng đôi khi định mệnh lại quay vòng thật kỳ lạ và đáng ngờ, thậm chí cả những điều kỳ lạ hơn nữa cũng sẽ diễn ra.

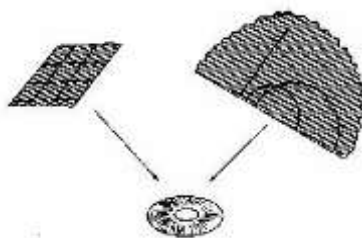
Toàn bộ sự việc này sẽ còn làm cho nhiều người bận tâm trong nhiều thập niên sau đó. Việc tìm hiểu chính xác những gì Yutaka Taniyama đã hàm ý đến, nghĩ đến cũng như đã nói ra là yêu cầu đặt ra cho các sử gia ngày nay. Có điều thật đáng tiếc là sự bất hạnh đã bám theo Taniyama cũng như nó đã xảy ra với nhiều thiên tài toán học trẻ tuổi khác.

Những năm sau đó, Goro Shimura đã rời Tôkyô, đầu tiên là tới Paris, sau đó đến Viện Nghiên cứu Cao cấp và Trường Đại học Tổng hợp Princeton. Đôi bạn Taniyama và Shimura vẫn tiếp tục trao đổi với nhau qua thư từ. Tháng 9 năm 1958, Goro Shimura nhận được lá thư cuối cùng của Yutaka Taniyama. Sáng ngày 17 tháng 11 năm 1958, năm ngày sau lễ sinh nhật lần thứ ba mươi mốt của Yutaka Taniyama, người ta tìm thấy ông đã tự vẫn trong căn phòng của mình cùng với lá thư tuyệt mệnh để lại trên bàn làm việc.

Giả thuyết của Shimura

Một thập niên đã trôi qua kể từ Hội nghị Tôkyô-Nikko và Goro Shimura, lúc này đang ở Trường Đại học Tổng hợp Princeton, vẫn tiếp tục công việc nghiên cứu của mình về lý thuyết số, các hàm zeta và các đường cong elliptic. Ông đã hiểu người bạn cũ của mình mắc sai sót toán học ở chỗ nào và chính việc nghiên cứu và tìm tòi sự hài hòa bí ẩn trong các lĩnh vực toán học của bản thân ông đã giúp ông xây dựng được một giả thuyết khác rõ ràng hơn và chính xác hơn. Giả thuyết của ông là: mọi đường cong elliptic trên các số hữu tỷ được "đều hóa" bởi dạng modula. Các dạng modula là các yếu tố trên mặt phẳng phức và chúng đặc biệt hơn các hàm tự đẳng cấu của Taniyama. Và việc chỉ ra miền xác định là các số hữu tỷ và những sự điều chỉnh khác cũng là những sửa đổi quan trọng.

Giả thuyết của Shimura có thể giải thích bằng hình 20.



Hình 20

Nếu ta "cuộn" mặt phẳng phức thành một hình xuyến (cái bánh vòng trong hình 20), thì mặt cong này sẽ chứa tất cả các nghiệm của các phương trình elliptic trên các số hữu tỷ

và các số hữu tỷ này lại nảy sinh từ các phương trình của Diophantus. Điều đó đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat : Nếu một nghiệm của phương trình Fermat $x^n + y^n = z^n$ tồn tại thì nghiệm này cũng phải nằm trên hình xoắn. Lúc này Shimura giả định rằng mọi đường cong elliptic với các hệ số hữu tỷ (tức là một phương trình có các hệ số dạng a/b , trong đó cả a và b đều là số nguyên) có một "người bạn đồng hành" trên nửa mặt phẳng phức Poincaré cùng với tính chất hình học hyperbolic và phi Euclid của nó. "Người bạn đồng hành" riêng của mỗi một đường cong elliptic hữu tỷ là một hàm rất đặc biệt trên nửa mặt phẳng phức và hàm này là bất biến đối với các phép biến đổi mặt phẳng rất phức tạp - các phép biến đổi đã nêu trước đây: $f(z) \mapsto f(az+b/cz+d)$, mà các hệ số lập thành một nhóm cùng với nhiều tính đối xứng kỳ lạ. Toàn bộ quá trình này rất rắc rối, có tính chất rất kỹ thuật và không thể chứng minh được trong một tương lai định trước - điều mà hầu hết các nhà toán học đã tin tưởng trong nhiều thập niên.

Giả thuyết của Shimura nói rằng mọi đường cong elliptic giống như phần nằm ở bên trên ngấn nước của tảng băng trôi trên biển. Bên dưới ngấn nước này là một cấu trúc vô cùng phức tạp. Để chứng minh giả thuyết này người ta phải chỉ ra rằng mọi tảng băng trôi trên biển đều phải có phần chìm dưới nước. Mặc dù biết rằng một số nhóm các tảng băng đặc biệt có phần chìm dưới nước nhưng vì có nhiều vô hạn các tảng băng nên người ta không thể kiểm tra phần dưới của từng tảng băng một. Cần phải có một chứng minh tổng quát để chỉ ra rằng một tảng băng không thể tồn tại nếu nó không có phần chìm dưới nước. Việc trình bày rõ ràng một chứng minh như thế là cực kỳ khó khăn.

Mưu đồ và sự phản bội Trong một bữa tiệc tại Viện Nghiên cứu Cao cấp ở Princeton vào những năm đầu thập niên 1960. Shimura gặp lại Jean-Pierre Serre. Theo Shimura, Serre khá kiêu ngạo khi tiến về phía ông. "Tôi cho rằng các kết quả của ông về các đường cong modula chẳng có gì hay ho cả", ông ta nói. "Vì sao ư ? - Do chúng không áp dụng được cho một đường cong elliptic bất kỳ". Trong lời đáp, Shimura phát biểu chính xác giả thuyết của mình: "Một đường cong như thế *bao giờ* cũng được "đều hóa" bởi một đường cong modula"[\[17\]](#).

Serre tiến lại phía Weil, người không tham dự bữa tiệc nhưng là thành viên của Viện cho nên cũng ở cạnh đấy, và kể với ông về cuộc thảo luận của mình với Shimura. Đáp lại, André Weil tiến về phía Shimura. "Có đúng là ông nói vậy không?", ông ngập ngừng hỏi Shimura. "Vâng", Shimura trả lời, "ông có cho rằng như thế là hợp lý không?". Mười năm sau khi Shimura đưa ra giả thuyết, André Weil vẫn chưa tin vào giả thuyết này. Ông đã trả lời: "Tôi không thấy có bất kỳ lý do nào phản bác lại giả thuyết vì cả hai tập hợp này đều đếm được, nhưng tôi cũng không thấy bất kỳ lý do nào để ủng hộ nó". Sau này, Serge Lang ở Trường

Đại học Tổng hợp Yale đã nhận xét những gì mà Weil vừa nói là "ngớ ngẩn", là "rỗng tuếch". Serge Lang đã gửi cho khoảng 50 nhà toán học trên thế giới những ý kiến này cùng với các bản sao chụp của hai lá thư mà ông gọi là "Hồ sơ Taniyama-Shimura". Điều mà Weil muốn nói khi ông ta trả lời Shimura cũng giống như thế này: Nếu trong một căn phòng bạn thấy bảy người đàn ông và bảy người đàn bà, và bạn giả định rằng họ là bảy cặp vợ chồng thì tôi chẳng thấy lý do gì để phản bác vì số đàn ông và số đàn bà là như nhau. Nhưng mà tôi cũng chẳng tìm được lý do nào để ủng hộ cái điều giả định của bạn. Cũng có thể tất cả họ đều độc thân. Lý do để Lang nhận xét lời phát biểu này ngớ ngẩn là ở chỗ: Tuyệt nhiên không thể áp dụng cách thức đếm theo bất kỳ con đường giản đơn nào vào đây được vì "tính đếm được" nghĩa là đếm được vô hạn (chẳng hạn như số lượng tất cả các số nguyên dương: 1, 2, 3, 4,...), và việc ghép các tập hợp vô hạn như thế là một việc không đơn giản. Dù thế nào thì cũng đã rõ là André Weil không tin giả thuyết của Shimura là đúng. Sau này, ông ta thừa nhận rằng, cuộc đối thoại đã diễn ra và cho rằng cuộc đối thoại này là ngớ ngẩn, là ấu trĩ và là gì gì nữa... Nhưng phải đến tận năm 1979 Weil mới chính thức thừa nhận và viết : [\[18\]](#)

*"Vài năm sau, tại Princeton, Shimura hỏi tôi có cho rằng mọi đường cong elliptic trên $\mathbf{Q}$ (trường các số hữu tỷ, ND) **vẫn được tiếp tục** trên jacobian của một đường cong được xác định bởi nhóm con đồng dư của một nhóm modula **là hợp lý** không. Tôi đã trả lời ông ta rằng, tôi không thấy bất cứ lý do nào để phản bác lại điều đó, vì tập hợp này và tập hợp kia đều không đếm được, nhưng tôi cũng chẳng có căn cứ nào để ủng hộ giả thuyết này."*

(nguyên văn bằng tiếng Pháp)

Mặc dù vậy, Weil đã viết "Shimura hỏi tôi", chứ không phải là "Shimura nói với tôi", khi nói đến mệnh đề chính là giả thuyết của Shimura. Weil đã công bố một số bài báo liên quan và trong khi ông ta không tin vào lý thuyết của Shimura thì chính tên ông ta lại gắn với lý thuyết đó. Sự nhầm lẫn đã mặc nhiên tồn tại khi các nhà toán học nhắc đến những công trình của các nhà toán học khác trong các bài báo của mình, và việc trích dẫn sai xảy ra đến tận bây giờ khi các tác giả hiểu biết không thật cận kề về lịch sử toán học đã gọi là giả thuyết Weil-Taniyama, mà lẽ ra phải gọi là giả thuyết Shimura-Taniyama thì mới đúng. Weil có vẻ thích thú vì sự liên quan của mình với một lý thuyết quan trọng, trong khi chính ông ta lại không tin vào nó, song hầu hết các nhà toán học cho rằng giả thuyết này sẽ được chứng minh vào một ngày nào đó trong tương lai.

Cùng với nhiều thập niên trôi qua, ngày càng có nhiều lý do hơn để chứng tỏ sự tồn tại của mối liên hệ. Một khi giả thuyết được chứng minh, nó sẽ là một lý thuyết toán học quan trọng. Weil đã nghiên cứu xung quanh giả thuyết này và không bao giờ để cho các kết quả của mình quá xa mối liên hệ có thể có giữa các dạng modula của mặt phẳng phức và các

đường cong elliptic của các phương trình của Diophantine. Và đến khi hiểu rõ ràng hơn, ông ta giữ kín không đề cập đến Shimura và vai trò cực kỳ quan trọng của nhà toán học này trong suốt gần hai thập niên đã qua. Thế rồi ông ta tán dương Shimura một cách rất tự nhiên trong khi đàm thoại thông thường nhưng lại chỉ nói về Shimura một cách thoáng qua trong một bài báo đã được công bố. Trong khi đó, ở Pháp, Serre cũng tích cực góp phần vào việc quy kết sai lầm. Ông ta đã cố gắng hết sức nhằm gắn tên tuổi André Weil với giả thuyết thay cho tên tuổi của Goro Shimura.

"Một bài tập dành cho bạn đọc quan tâm"

Vào năm 1967 André Weil công bố một bài báo bằng tiếng Đức, trong đó ông ta viết: [\[19\]](#)

"Những điều này, tức là những điều đối với mọi đường cong xác định trên $\mathbf{Q}$, có đúng như vậy không, thì tại thời điểm này vẫn còn rất mơ hồ và có thể xem như là một bài tập dành cho bạn đọc quan tâm". (nguyên văn bằng tiếng Đức)

Đoạn trích này đề cập đến các đường cong elliptic trên các số hữu tỷ (chúng được các nhà toán học ký hiệu bằng chữ $\mathbf{Q}$), còn "sich so Verhalten" (tiếng Đức) ở đây ám chỉ các dạng modula, tức là nói tới giả thuyết của Shimura. Nhưng ở đây một lần nữa Weil không gắn lý thuyết này với người khởi xướng ra nó. Mãi 12 năm sau ông ta mới làm điều đó và thậm chí chỉ viết "Shimura có hỏi tôi..." như chúng ta đã thấy. Trong bài báo bằng tiếng Đức nêu trên, Weil cho giả thuyết là "mơ hồ" và khi đó ông ta đã làm cái việc lạ kỳ. Rất giản đơn, ông ta quy giả thuyết này thành một bài tập giành cho bạn đọc quan tâm (theo nguyên văn tiếng Đức). "Một bài tập dành cho bạn đọc quan tâm" này làm cho một trong số những nhà toán học tài ba nhất thế giới phải làm việc liên tục suốt bảy năm trời để cố tìm lời giải. Khi một nhà toán học ra bài tập về nhà và yêu cầu học sinh chứng minh một định lý nào đó thì thường người ấy đã có một cách chứng minh nào đó của định lý và tất nhiên phải tin chắc rằng định lý là đúng chứ không phải "mơ hồ" như Weil đã mô tả.

Đã từng có một câu chuyện cũ kể rằng một giáo sư toán học nói với cả lớp "điều này là hiển nhiên" khi đề cập đến một khái niệm nào đó. Lớp học trở nên bối rối vì điều đó chẳng hiển nhiên chút nào. Cuối cùng một sinh viên dứng cảm giơ tay và hỏi "Vì sao ạ?". Thế là, vị giáo sư bắt đầu vẽ vẽ, viết viết lên mép bảng bằng một tay, còn tay kia che những dòng chữ đó,

rồi xóa hết những gì ông vừa làm. Sau khoảng mười phút kín đáo làm nháp, vị giáo sư xóa sạch bảng rồi thông báo với cả lớp đang thần mặt ra: "Đúng vậy, điều này là hiển nhiên".

Sự đối trá Trong những năm 1970, các vấn đề của Taniyama từ Hội nghị Tôkyô-Nikko được phổ biến rộng rãi hơn. Trong thời gian này, vì Weil đã viết về cái giả thuyết mà ông ta hồ nghi, các đường cong elliptic modula được biết đến như là "Các đường cong Weil". Khi mà các vấn đề của Taniyama được biết đến nhiều hơn ở phương Tây thì cái giả thuyết về các đường cong này được gọi là "Giả thuyết Taniyama-Weil". Như vậy là tên của Shimura bị gạt ra ngoài hoàn toàn. Song vì tên của Taniyama đã được gắn vào, Weil bắt đầu công kích các giả thuyết. Năm 1979, chỉ năm năm trước khi được Gerd Faltings chứng minh, Weil thậm chí đã lên tiếng chống lại "cái gọi là 'giả thuyết Mordell' về các phương trình của Diophantine". Ông ta nói: "Thật thú nếu điều này là đúng, còn tôi thà đánh cuộc cho nó đúng còn hơn là cho nó sai. Nhưng đây chẳng qua cũng chỉ là điều mong muốn vì chẳng có tí dấu hiệu gì ủng hộ hay phản bác nó cả". Nhưng khi đó Weil đã nhầm. Ngay từ những năm đầu thập niên 1970, một số nhà toán học Nga, trong đó có Shafarevich và Parshin, đã đạt được những kết quả minh chứng cho giả thuyết Mordell. Quả nhiên, vào năm 1984 Gerd Faltings đã hoàn toàn chứng minh được giả thuyết này, làm cho Định lý cuối cùng của Fermat "hầu như luôn luôn đúng".

Trong khi André Weil quay lại phản bác tất cả các giả thuyết vào lúc tên ông ta không còn được độc quyền gắn với cái giả thuyết mà giờ đây nhiều nhà toán học gọi là Giả thuyết Taniyama-Weil, thì ở Paris, Serre đang cố làm sao cho tên tuổi của Shimura không được gắn với giả thuyết này. Vào năm 1986, trong một bữa tiệc tại Trường Đại học Tổng hợp California ở Berkeley, trong tầm nghe được của một số người, Jean-Pierre Serre đã nói với Serge Lang rằng André Weil đã kể cho mình về cuộc đàm thoại giữa ông ta với Goro Shimura. Theo Serre thì đây là những gì đã xảy ra do Weil kể lại:

Weil: *Tại sao Taniyama lại cho rằng tất cả các đường cong elliptic là modula?*

Shimura: *Chính ông đã nói với ông ấy như thế, ông quên rồi đấy.*

Lúc đó, Lang - người đã từng vô tình sử dụng các thuật ngữ "đường cong Weil" và "giả thuyết Taniyama-Weil" - cảm thấy nghi ngờ. Ông đã quyết định tự mình đi tìm sự thật. Lang lập tức viết thư cho cả Weil và Shimura, rồi cho Serre. Shimura dứt khoát phủ nhận việc

một cuộc hội thoại như thế đã từng xảy ra, đồng thời đưa ra nhiều bằng chứng cho lời xác nhận này. Weil không trả lời ngay. Còn Serre, trong lời đáp của mình, đã chỉ trích việc Lang muốn tìm ra sự thật. Trong xêmina Bourbaki vào tháng 6 năm 1995, Serre vẫn đề cập đến giả thuyết của "Taniyama-Weil" mà gạt ra ngoài tên tuổi của người khởi xướng ra giả thuyết đó - người mà 30 năm trước đã tin tưởng và thông báo cho ông ta giả thuyết của mình. Sau khi Lang liên hệ với Weil lần thứ hai thì Weil mới trả lời. Bức thư của ông ta như sau: [\[20\]](#)

Ngày 3 tháng 12 năm 1986
Ông Lang kính mến!

Tôi không nhớ là tôi đã nhận được bức thư ông viết ngày 9 tháng 8 khi nào và ở đâu. Khi nhận được thư ông, tôi đã (và hiện vẫn đang) có những vấn đề quan trọng hơn nhiều cần phải suy nghĩ.

Tôi buộc phải phản đối quyết liệt bất cứ sự ám chỉ nào rằng tôi đã mưu toan giảm bớt công lao của Taniyama và của Shimura. Tôi lấy làm vui mừng khi thấy ông ngưỡng mộ họ. Tôi cũng vậy. Việc thuật lại các cuộc hội thoại diễn ra rất lâu trước đây thường dễ dẫn đến hiểu lầm. Ông nhìn nhận chúng như là "lịch sử"; nhưng không phải thế. Cùng lắm thì chúng cũng chỉ là những giai thoại. Còn về cuộc tranh luận mà ông cho là đáng để xới vấn đề lên thì tôi thấy chính những bức thư của Shimura đã kết thúc dứt điểm vấn đề đối với mọi người.

Về việc gắn các tên tuổi với những khái niệm, định lý, hoặc (?) giả thuyết, tôi vẫn thường nói :

(a) khi một tên riêng gắn với (giả dụ) một khái niệm, điều này không bao giờ được xem là dấu hiệu chứng tỏ rằng tác giả được nói tới đã làm gì liên quan tới khái niệm đó; điều ngược lại mới thường đúng nhiều hơn. Pythagoras đâu có làm gì cho định lý "của ông", Fuchs với các hàm Fuchs cũng vậy và August Comte với đường August-Comte cũng không hơn gì;

(b) những tên riêng có xu hướng được thay thế bằng những cái tên hợp lý hơn : dãy Leray-Koszul nay gọi là dãy phổ (abel giờ đây được viết bằng chữ a thường, như Siegel trước kia có lần đã nói với Erdos).

Tại sao tôi không nên thỉnh thoảng đưa ra các nhận xét "ngớ ngẩn" (theo như cách ông nói)? Thực ra, tôi đã "không có liên quan gì" kể từ năm 1979, khi tôi biểu hiện sự hoài nghi đối với giả thuyết của Mordell vì khi ấy tôi hoàn toàn không biết gì về các công trình theo hướng đó của các nhà toán học Nga (Parshin, v.v...). Nếu như tôi có lỗi thì lý do là tôi đã có những cuộc thảo luận dài với Shafarevich vào năm 1972 nhưng ông ta chẳng bao giờ nhắc tới việc đó.

*Kính thư,
Weil*

AW :

Tái bút : Nếu ông muốn nhân bản lá thư này bằng chiếc máy photocopy của ông thì xin ông cứ tự nhiên. Tôi tự hỏi công ty photocopy sẽ làm gì nếu thiếu ông và những người giống như ông.

Sâu trong Rừng Đen, mùa thu 1984 Trong khi cuộc tranh luận về vấn đề ai đã khởi xướng giả thuyết Shimura-Taniyama đang diễn ra gay gắt ở Berkeley, New Haven, Princeton và vượt cả Đại Tây Dương sang Paris thì một điều hoàn toàn bất ngờ đang xảy ra ở sâu trong khu Rừng Đen tây nam nước Đức.

Gerhard Frey đã nhận bằng cử nhân tại Trường Đại học Tổng hợp Tubingen và bằng tiến sĩ tại Trường Đại học Tổng hợp Heidelberg, nơi ông đã nghiên cứu lý thuyết số và chịu ảnh hưởng bởi các công trình của Hasse và Weil. Frey say mê nghiên cứu mối liên hệ qua lại giữa lý thuyết số và hình học đại số, một lĩnh vực toán học mới được phát triển trong vòng 50 năm gần đây. Ông cũng quan tâm đến hình học số học. Chính các mối liên hệ giữa lý thuyết số và các lĩnh vực mới mẻ hơn của hình học đại số và hình học số học đã giúp ông tìm ra một khẳng định toán học bất ngờ. Trong những năm 70, Frey đã có nhiều công trình về các đường cong elliptic, các phương trình Diophantine và năm 1978 ông đã đọc bài báo "Các đường cong modula và idêan Eisenstein" của Barry Mazur, Trường Đại học Harvard. Bài báo đã tác động mạnh đến Frey cũng như nhiều nhà lý thuyết số; trong đó có Kenneth Ribet ở Berkeley và Andrew Wiles ở Princeton. Bài báo của Mazur làm cho Frey thêm tin tưởng và thấy rằng mình cần phải suy nghĩ rất nghiêm túc về những ứng dụng của các đường cong modula và các biểu diễn Galois vào lý thuyết các đường cong elliptic. Ông đã phát hiện ra rằng điều này dẫn ông tới, và hầu như không thể tránh được, các phương trình Diophantine mà các phương trình này liên quan chặt chẽ tới các phương trình dạng Fermat. Đây là một nhận xét hết sức quan trọng mà Frey đã cố gắng chính xác hóa.

Năm 1981 Gerhard Frey thăm Trường Đại học Harvard vài tuần và có nhiều cuộc trao đổi với Barry Mazur. Các cuộc trao đổi này đã làm sáng tỏ những điều ông đang suy nghĩ. Màn sương mù dày đặc bao quanh các mối liên hệ khó hiểu mà ông hình dung giữa các phương trình dạng Fermat và mối liên hệ giữa các dạng modula và các đường cong elliptic đã dần dần tan biến đi. Frey đi tiếp đến Berkeley và ở đây ông đã nói chuyện với Ken Ribet, nhà lý thuyết số tài ba đã từng tốt nghiệp Trường Đại học Harvard và đã từng cộng tác với Mazur trong các vấn đề liên quan. Rồi Frey trở về nước Đức quê hương của mình. Ba năm sau, ông được mời tới giảng bài tại Trung tâm Oberwolfach nằm sâu trong khu Rừng Đen.

Oberwolfach là một trung tâm hội nghị và hội thảo toán học, nằm giữa một vùng thiên nhiên thanh bình và xinh đẹp, cách xa các thành phố và các vùng dân cư đông đúc. Hàng năm trung tâm tài trợ và tổ chức khoảng 50 hội nghị quốc tế về các chủ đề toán học khác nhau. Các bài thuyết trình, và thậm chí cả việc tham dự hội nghị, đều theo thư mời. Mọi cố gắng đều được thực hiện nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho việc trao đổi ý kiến giữa các chuyên gia đến từ các nước khác nhau. Năm 1984, Gerhard Frey đã có bài thuyết trình tại

một hội nghị về lý thuyết số diễn ra tại đây. Ông đã đưa ra một nhận xét có vẻ còn mơ hồ. Bản in rônêô các công thức toán học mà ông phân phát khắp hội nghị hình như có hàm ý rằng nếu giả thuyết Shimura-Taniyama quả thật là đúng thì Định lý cuối cùng của Fermat sẽ được chứng minh. Điều này chẳng có ý nghĩa gì cả. Khi Ken Ribet lần đầu nghe thấy nhận xét của Frey ông cho đó là một lời nói đùa. Tính modula của các đường cong elliptic lẽ nào lại có thể liên quan tới Định lý cuối cùng của Fermat? - Ông tự hỏi rồi không suy nghĩ gì thêm về điều nhận xét lạ lùng đó và tiếp tục công việc của mình. Nhưng một số người ở Paris và những nơi khác lại quan tâm đến cái mệnh đề chưa được chứng minh và chưa hoàn chỉnh lắm của Frey. Jean- Piene Serre đã viết thư cho một nhà toán học tên là J.F. Mestre. Lá thư này được nhiều người biết đến và sau đấy Serre đã công bố một bài báo nhắc lại các giả thuyết của mình trong bức thư gửi Mestre [\[21\]](#) .

Định lý của Ribet

Ken Ribet, người lúc đầu đã cho rằng mệnh đề của Frey là một lời nói đùa, đã bắt đầu để ý đến các giả thuyết của Serre và thực tế, khi Ribet dành thì giờ suy nghĩ về "lời nói đùa" của Frey, ông nhận thấy một điều gì đó đã hình thành cho mình. Đó là việc phải làm sáng tỏ các phát biểu của Gerhard Frey. Nếu các phát biểu đó được chứng minh thì sẽ có được phép suy diễn sau đây:

Giả thuyết Shimura-Taniyama --> Định lý cuối cùng của Fermat.



Ken Ribet đang trình bày các định lý quan trọng của mình.

Ý tưởng của Frey được phát triển thật tài tình. Frey lý luận như sau: Giả sử Định lý cuối cùng của Fermat sai. Thế thì, với lũy thừa n nào đó lớn hơn 2, phương trình Fermat: $x^n + y^n = z^n$ sẽ có nghiệm, trong đó x, y, z là các số nguyên. Khi đó, một nghiệm riêng a, b, c có thể làm nảy sinh một đường cong elliptic đặc biệt. Nay Frey đã viết ra được phương trình tổng quát của đường cong này dựa trên nghiệm của phương trình Fermat. Giả thuyết mà ông trình bày tại Oberwolfach nói rằng đường cong này, bây giờ gọi là đường cong Frey, là một "con vật" rất kỳ lạ. Nó kỳ lạ đến nỗi không thể tồn tại trong thực tế. Và điều quan trọng nhất là: cái đường cong elliptic được tạo thành trong trường hợp Định lý cuối cùng của Fermat sai không thuộc dạng modula. Vì vậy, nếu giả thuyết Shimura-Taniyama thực sự đúng thì tất cả các đường cong elliptic phải là modula. Do đó, cái đường cong elliptic mà không phải là modula không thể tồn tại được. Từ đó suy ra: đường cong Frey - đường cong elliptic không phải là modula (cùng với tất cả các tính chất đặc trưng kỳ lạ khác của nó) không thể tồn tại. Do vậy, nghiệm của phương trình Fermat cũng không thể tồn tại. Sự không tồn tại nghiệm của phương trình Fermat có nghĩa là Định lý cuối cùng của Fermat (nói rằng phương trình không có nghiệm nguyên với mọi n lớn hơn 2) được chứng minh. Đây là một quá trình suy diễn rất phức tạp nhưng đã được tiến hành theo một quy tắc logic chứng minh toán học quen thuộc, đó là: A suy ra B; do đó, nếu B không đúng thì A cũng không đúng. Tuy nhiên, chính mệnh đề Frey cũng chỉ là một giả thuyết. Giả thuyết này phát biểu rằng nếu một giả thuyết khác (giả thuyết Shimura-Taniyama) đúng thì Định lý cuối cùng của Fermat sẽ được chứng minh. Cặp các giả thuyết tiếp theo trong bức thư của Serre gửi Mestre đã giúp thêm Ken Ribet nhìn nhận giả thuyết Frey bằng những thuật ngữ rõ ràng hơn.



Gerhard Frey, người có "ý tưởng kỳ quặc" rằng không thể tồn tại một đường cong elliptic như là một nghiệm của phương trình Fermat.

Trước đây, chẳng bao giờ Ken Ribet quan tâm đến Định lý cuối cùng của Fermat. Khởi đầu ông theo ngành hóa học tại Trường Đại học Tổng hợp Brown. Do ảnh hưởng và sự dẫn dắt của Kenneth F. Ireland, Ribet đã hướng đến toán học và say mê các hàm zeta, các tổng lũy thừa và lý thuyết số. Ông từng bàn luận qua loa về Định lý cuối cùng của Fermat như là "một trong những vấn đề mà tầm quan trọng thực sự của chúng chẳng có gì để nói nữa". Nhiều nhà toán học cũng giữ quan điểm như thế bởi vì các vấn đề trong lý thuyết số có xu hướng biệt lập, chúng không có cấu trúc thống nhất hoặc tuân theo nguyên tắc cơ bản chung nào. Tuy nhiên, điều thú vị của Định lý cuối cùng của Fermat chính là ở chỗ nó nổi lịch sử toán học từ buổi đầu của nền văn minh tới thời đại của chúng ta. Và lời giải cuối

cùng của bài toán cũng nối liền hầu như toàn bộ các ngành trong phạm trù toán học, bao gồm cả các lĩnh vực nằm ngoài lý thuyết số như đại số, giải tích, hình học và tô pô.

Ribet tiếp tục làm luận án tiến sĩ toán học tại Trường Đại học Harvard. Mới đầu còn gián tiếp rồi sau khi đã trở thành tiến sĩ toán học thì trực tiếp hơn, ông đã chịu ảnh hưởng của nhà lý thuyết số và nhà hình học xuất sắc Barry Mazur - một con người mà bằng tầm nhìn của mình ông ta đã truyền cảm hứng cho mọi nhà toán học có tham gia dù chỉ rất ít vào việc cố gắng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Bài báo của Mazur về idêan Eisenstein là một bản tóm tắt lý thuyết các idêan mà trong thế kỷ trước Ernst Kummer đã phát triển thành các lĩnh vực toán học hiện đại - hình học đại số và các cách tiếp cận mới đối với lý thuyết số thông qua hình học.[\[22\]](#)

Cuối cùng, Ribet đã trở thành giáo sư toán học của Trường Đại học Tổng hợp California ở Berkeley và tiếp tục nghiên cứu lý thuyết số. Năm 1985, ông được biết cái nhận xét "mơ hồ" của Frey rằng: nếu nghiệm của phương trình Fermat tồn tại, tức là, nếu Định lý cuối cùng của Fermat sai, thì nghiệm này sẽ tạo nên một đường cong hết sức kỳ quặc. Đường cong Frey này sẽ gắn với một đường cong elliptic không modula. Cặp giả thuyết đồng hành trong bức thư của Serre gửi Mestre đã khiến ông quan tâm đến việc cố gắng chứng minh giả thuyết Frey. Mặc dù lâu nay không thực sự quan tâm đến Định lý cuối cùng của Fermat nhưng Ribet đã nhận ra rằng vấn đề này trở nên thời sự và nó diễn ra ngay trong lĩnh vực mà ông nghiên cứu rất kỹ. Trong tuần lễ từ ngày 18 đến 24 tháng 8 năm 1985, Ribet đã tham dự hội nghị hình học đại số - số học tại Arcata, California. Ông bắt đầu suy nghĩ về mệnh đề Frey và nó làm cho ông bận rộn trí óc trong suốt một năm sau đó. Khi Ribet hoàn thành công việc giảng dạy tại Berkeley vào đầu mùa hè năm 1986, ông đã bay sang Đức và tiếp tục nghiên cứu tại một trung tâm toán học nổi tiếng thế giới, Viện Max Planck. Vừa đặt chân tới Viện, Ribet đã thực hiện một cú đột phá vĩ đại. Ông gần như đã chứng minh được giả thuyết Frey. Nhưng ông vẫn chưa hoàn toàn đạt đến đích. Khi trở về Berkeley, Ribet tìm gặp Barry Mazur mới từ Harvard tới thăm nơi đây. "Barry, chúng ta hãy đi uống một tách cà phê đi!", Ribet gợi ý rồi hai người tới một quán cà phê quen thuộc ở gần khu Trường Đại học Tổng hợp California. Trong khi nhấm nháp ly cà phê sữa, Ribet tâm sự với Mazur: "Tôi đang cố gắng khái quát những gì mình đã làm được để có thể chứng minh được giả thuyết Frey. Hình như tôi vẫn còn thiếu một cái gì đó để khái quát chứng minh...". Mazur nhìn vào những gì mà Ribet đang cho ông xem. "Ken này, cậu đã hoàn tất cả rồi đấy", ông nói, "cậu chỉ cần thêm vào một không điểm gamma đặc biệt nào đó của cấu trúc N, rồi tiếp tục cách làm của cậu và như vậy cậu đã đến đích!". Ribet nhìn Mazur, rồi lại nhìn ly cà phê sữa của mình, và sau đó ngơ ngàng quay lại nhìn Mazur. "Lạy Chúa, anh hoàn toàn chính xác!", ông nói. Sau đó ông trở về phòng làm việc của mình để hoàn tất chứng minh. "Ý tưởng của Ken thật hết sức tuyệt diệu", Mazur thốt lên khi nói về chứng minh tài tình của Ken Ribet sau khi nó được công bố và được giới toán học biết đến. [\[23\]](#)



Barry Mazur, Trường Đại học Tổng hợp Harvard, "bậc tiền bối" của các nhà toán học mà sự hiểu biết sâu sắc về hình học của ông đã truyền cảm hứng cho tất cả những người tham gia đóng góp vào việc tìm ra chứng minh hoàn chỉnh Định lý cuối cùng của Fermat.

Ribet đã xây dựng và chứng minh được một định lý chứng tỏ rằng nếu giả thuyết Shimura-Taniyama đúng thì Định lý cuối cùng của Fermat sẽ trở thành hệ quả trực tiếp của giả thuyết đó. Một người mới năm trước còn cho rằng nhận định của Frey là một lời nói đùa thì giờ đây đã chứng minh được rằng "lời nói đùa" ấy chính là một sự thật trong toán học. Cánh cửa để tấn công bài toán Fermat nay đã được rộng mở nhờ các phương pháp hình học đại số-số học hiện đại. Giờ đây tất cả những gì mà thế giới cần là một ai đó chứng minh được cái giả thuyết có vẻ khó tin: Giả thuyết Shimura-Taniyama. Khi ấy hiển nhiên là Định lý cuối cùng của Fermat sẽ đúng.

Ước mơ của một cậu bé

Người muốn thực hiện điều nêu trên chính là Andrew Wiles. Năm mười tuổi, Andrew Wiles đã đến thư viện công cộng của thành phố nơi cậu sinh sống tại nước Anh và trông thấy một cuốn sách toán học. Cậu đã đọc được Định lý cuối cùng của Fermat trong cuốn sách đó. Cái định lý, như mô tả trong cuốn sách, dường như quá đơn giản đến nỗi bất cứ một em bé nào cũng có thể hiểu được. Theo lời Wiles: "Trong sách nói rằng bạn sẽ không bao giờ tìm được các số nguyên x, y, z sao cho $x^3 + y^3 = z^3$. Dù bạn hết sức cố gắng thử thế nào đi nữa, bạn cũng không bao giờ tìm được các số nguyên như thế. Và trong sách còn nói rằng điều đó cũng đúng đối với $x^4 + y^4 = z^4$, $x^5 + y^5 = z^5$, và v.v... Điều này có vẻ quá đơn giản. Và cuốn sách nói rằng hơn ba trăm năm nay chưa một ai chứng minh được điều này. Tôi muốn chứng minh điều đó...".

Vào những năm 1970, Andrew Wiles vào đại học. Sau khi tốt nghiệp, anh được nhận làm nghiên cứu sinh toán tại Cambridge. Thầy hướng dẫn anh là giáo sư Joan Coates. Wiles phải ngừng ước mơ chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat từ thời ấu thơ của mình lại. Việc

ngiên cứu bài toán này đã ngốn mất quá nhiều thời gian đến nỗi chẳng nghiên cứu sinh nào dám đi sâu vào đó. Vả lại, có thầy hướng dẫn nào lại dám nhận một nghiên cứu sinh với bài toán cổ đó - một vấn đề đã thu hút những bộ óc siêu việt nhất thế giới đi tìm lời giải từ hơn ba thế kỷ nay? Vào thập niên 1970, bài toán Fermat không "hợp thời" nữa. Cái "hợp thời", cái chủ đề nghiên cứu thực sự nóng hổi trong lý thuyết số lúc đó là các đường cong elliptic. Vì vậy, Andrew Wiles đã dành thì giờ nghiên cứu các đường cong elliptic và một lĩnh vực có tên gọi là Lý thuyết Iwasawa. Anh đã hoàn thành luận văn tiến sĩ và sau khi được cấp bằng tiến sĩ anh đã tìm được một chỗ làm việc tại Khoa Toán Trường Đại học Tổng hợp Princeton và chuyển sang Hoa Kỳ. Ở đó, anh tiếp tục nghiên cứu các đường cong elliptic và Lý thuyết Iwasawa.

Ngọn lửa cũ lại bùng cháy

Một buổi tối mùa hè nóng bức, Andrew đang nhấp ly trà đá tại nhà một người bạn. Đột nhiên, đang giữa câu chuyện, người bạn hỏi: "À này, anh có biết Ken Ribet vừa chứng minh được Giả thuyết Epsilon không?". Giả thuyết Epsilon, theo giải nghĩa của Serre, chính là giả thuyết Frey về mối liên hệ giữa Định lý cuối cùng của Fermat và giả thuyết Shimura-Taniyama, được các nhà lý thuyết số gọi tên một cách chưa chính thức. Wiles giật nảy mình. Ngay lúc đó, anh biết rằng cuộc đời anh đã thay đổi. Ước mơ chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat từ thời ấu thơ - một ước mơ mà anh đã phải gác lại để tiến hành công việc nghiên cứu khả thi hơn - đã sống lại với một sức mạnh lạ thường. Anh về nhà và bắt đầu suy nghĩ xem mình có thể chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama như thế nào.

"Trong vài năm đầu", sau này anh tâm sự, "tôi biết mình không có đối thủ vì tôi biết rằng không có ai - kể cả tôi - có được ý tưởng là sẽ bắt đầu từ đâu". Anh quyết định nghiên cứu vấn đề một cách kín đáo trong trạng thái đơn độc. "Quá nhiều người biết đến sẽ làm mất tập trung. Tôi sớm nhận thấy rằng chỉ cần đề cập đến Fermat là lập tức thu hút quá nhiều sự chú ý". Đương nhiên, thiếu gì những nhà toán học đầy tài năng, đặc biệt là ở một nơi như Princeton, và nguy cơ một ai đó sẽ hoàn thành công việc của anh thay anh - thậm chí còn làm tốt hơn - là hoàn toàn thực tế. Cho dù là vì lý do gì đi nữa thì Wiles đã tự giam mình trong căn gác xép và bắt đầu làm việc. Anh bỏ qua tất cả các đề tài nghiên cứu khác để dành toàn bộ thời gian của mình cho Định lý cuối cùng của Fermat. Wiles sử dụng tất cả thể mạnh của các công cụ đại số, hình học, giải tích và các lĩnh vực toán học hiện đại khác; các kết quả toán học quan trọng của những người đương thời và của những người đã đi trước trong lịch sử; các phương pháp chứng minh thông minh của Ribet và các kết quả của ông ta; các lý thuyết của Barry Mazur và các ý tưởng của Shimura, Frey, Serre, André Weil; và những công trình khác của nhiều, rất nhiều các nhà toán học khác.

Sự vĩ đại của Wiles, sau này Gerhard Frey nhận xét, là ở chỗ anh đã tin tưởng vào việc anh làm ở một thời điểm khi mà mọi nhà toán học trên thế giới tin rằng giả thuyết Shimura-Taniyama không thể chứng minh được trong thế kỷ XX.

Để chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama, Andrew Wiles biết rằng anh phải chứng minh mọi đường cong elliptic là modula. Anh phải chỉ ra rằng mọi đường cong elliptic, mà nghiệm của nó nằm trên hình xoắn, đúng là một dạng modula. Theo một nghĩa nào đó hình xoắn là không gian các hàm đối xứng phức tạp trên mặt phẳng phức mà các hàm này được gọi là các dạng modula. Chẳng ai có được ý tưởng gì để chỉ ra mối liên hệ kỳ quặc như thế giữa hai đối tượng dường như rất khác nhau ấy.

Wiles nhận ra rằng cách tốt nhất là thử đếm số các đường cong elliptic và số các đường cong elliptic dạng modula, sau đó chỉ ra rằng "số lượng" của chúng là như nhau. Cách làm này chứng tỏ rằng các đường cong elliptic và các đường cong elliptic dạng modula là như nhau, và do đó mọi đường cong elliptic đích thực là modula - như giả thuyết Shimura-Taniyama đã nêu.

Wiles nhận ra hai điều. Một là, anh không cần phải chứng minh toàn bộ "giả thuyết Shimura-Taniyama" mà chỉ cần chứng minh cho trường hợp đặc biệt: các đường cong elliptic bán ổn định với hệ số là các số hữu tỷ. Việc chứng minh giả thuyết đúng đối với một lớp bé hơn các đường cong elliptic này cũng đủ để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Hai là, việc "đếm" sẽ không áp dụng được ở đây vì anh đang làm việc với các tập hợp vô hạn. Tập hợp các đường cong elliptic bán ổn định là vô hạn. Bất kỳ một số hữu tỷ nào đó có dạng a/b , trong đó a, b là các số nguyên, đều cho một đường cong elliptic khác (chúng ta nói là một đường cong elliptic trên các số hữu tỷ). Vì có nhiều vô hạn các số như thế (a, b có thể là các số bất kỳ trong tập hợp nhiều vô hạn các số $1, 2, 3, 4, \dots$, đến vô cùng) nên có nhiều vô hạn các đường cong elliptic. Như vậy, cách đếm thông thường không dùng được.

Chia một bài toán lớn thành các bài toán nhỏ hơn

Wiles nghĩ rằng mình cần bắt đầu quá trình nghiên cứu từ các bài toán nhỏ hơn, lần lượt từng bước một. Đầu tiên có lẽ anh phải để ý đến tập hợp các hàm elliptic và xem mình có thể làm được gì đối với tập hợp này. Đây là một cách tiếp cận hay vì tách công việc ra như thế, dần dần anh có thể hiểu rõ từng tập hợp hàm. Trước hết, người ta đã biết rằng một số đường cong elliptic là modula. Đây là các kết quả rất quan trọng được nhiều nhà lý thuyết số khác tìm ra. Nhưng Andrew Wiles đã sớm nhận ra rằng việc chỉ xét các đường cong elliptic và thử đếm chúng để đối chiếu với các dạng modula có lẽ không phải là một cách tiếp cận hay vì anh đang làm việc với hai tập hợp vô hạn. Thực tế, anh cũng không tiến gần tới lời giải hơn chút nào so với André Weil đã nghi khi ông ta nói: "Tôi không thấy bất kỳ lý do nào phản bác lại giả thuyết ấy vì cả hai tập hợp đó đều đếm được (vô hạn nhưng có bậc vô hạn của các số nguyên và các số hữu tỷ, không phải bậc vô hạn cao hơn của các số vô tỷ và continuum), nhưng tôi cũng không thấy bất kỳ lý do nào để ủng hộ cho cái giả thuyết này...". Sau hai năm chẳng đi đến đâu, Wiles lại thử một cách tiếp cận mới. Anh nghĩ rằng mình có thể *biến đổi* các đường cong elliptic thành các biểu diễn Galois, rồi sau đó đếm các biểu diễn Galois để đối chiếu với các dạng modula.

Ý tưởng này thật tuyệt vời mặc dù nó không phải là hoàn toàn mới mẻ. Nguyên lý đằng sau ý tưởng này khá lý thú. Các nhà lý thuyết số quan tâm tới việc tìm nghiệm của các phương trình, như phương trình Fermat chẳng hạn. Lý thuyết toán học về các trường số đặt bài toán này trong trường hợp các trường mở rộng. Các trường là các tập hợp vô hạn và rộng lớn, rất khó phân tích. Do đó, các nhà lý thuyết số thường sử dụng lý thuyết Galois để chuyển các bài toán này từ các trường phức tạp sang cái gọi là các nhóm. Thông thường một nhóm được sinh ra bởi một tập hợp hữu hạn (hơn là vô hạn) các phần tử. Vì vậy, việc sử dụng lý thuyết Galois cho phép các nhà lý thuyết số chuyển từ một tập hợp vô hạn sang một tập hợp được biểu diễn bởi một tập hữu hạn. Phép biến đổi một bài toán như thế tạo ra một bước tiến quan trọng vì thao tác trên tập hợp hữu hạn các phần tử dễ hơn nhiều so với tập hợp vô hạn. Việc đếm chỉ có ý nghĩa đối với một số lượng hữu hạn các phần tử. Cách tiếp cận này hình như có thể thực hiện đối với một vài tập hợp các đường cong elliptic. Đây là một bước đột phá thành công, nhưng một năm sau Wiles lại mắc kẹt lần nữa.

Bài báo của Flach

Giờ đây, Andrew Wiles đang cố gắng để có thể đếm các tập hợp của các biểu diễn Galois tương ứng với các đường cong elliptic (bán ổn định) để so sánh với các dạng modula và chỉ ra rằng chúng như nhau. Trong khi làm việc này, anh đã sử dụng lĩnh vực chuyên sâu mà anh viết luận án tiến sĩ của mình, đó là lý thuyết Iwasawa hoàn chỉnh. Wiles cố gắng dùng lý thuyết này để tìm ra Công thức số lớp, một kết quả mà anh cần cho việc "đếm". Nhưng ở

đây, anh phải đối mặt với một bức tường. Anh đã không làm được gì để có thể đến gần câu trả lời hơn.



Andrew Wiles trả lời phỏng vấn.

Mùa hè năm 1991, Wiles dự một hội nghị ở Boston và ở đó anh đã gặp lại John Coates, thầy hướng dẫn luận văn tiến sĩ trước đây của anh tại Cambridge. Giáo sư Coates nói với Wiles rằng nhờ sử dụng một công trình trước đây của nhà toán học Nga tên là Kolyvagin, một trong các học trò của ông là Matthias Flach đã tìm ra Hệ thống Euler (mang tên Leonhard Euler) trong khi cố gắng chứng minh Công thức số lớp. Đây chính là điều mà Wiles cần để chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama, nếu đúng là anh có thể mở rộng các kết quả riêng biệt của Flach thành Công thức số lớp hoàn chỉnh. Wiles rất phấn khởi khi nghe Coates nói về công trình của Flach. "Kết quả này như là đã được đặt làm sẵn" cho vấn đề của anh, Wiles nói, cứ như là Matthias Flach đã làm tất cả việc này chỉ để cho anh và Wiles tức thì gác lại toàn bộ công việc của mình liên quan đến Lý thuyết Iwasawa hoành và suốt ngày đêm đắm mình trong công trình của Kolyvagin và Flach. Nếu "Hệ thống Euler" của họ thực sự áp dụng được thì Wiles hy vọng có thể đạt được kết quả về số lớp và giả thuyết Shimura-Taniyama có thể được chứng minh đối với các đường cong elliptic bán ổn định, như thế là đủ để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Tuy nhiên, đây là một công việc rất khó khăn và nó nằm ngoài lĩnh vực Iwasawa mà Wiles am hiểu tường tận. Càng ngày Wiles càng cảm thấy cần phải tìm ai đó để trao đổi. Anh cần một người có thể kiểm tra sự tiến triển công việc của anh trong các lĩnh vực chưa được khám phá này, nhưng người đó lại không được tiết lộ điều gì cho bất cứ ai khác.

Một người bạn tốt

Cuối cùng Wiles đã phải quyết định để chọn một trong hai cách: Hoặc là anh tiếp tục giữ bí mật mọi điều như anh đã làm suốt thời gian dài vừa qua, hoặc là thôi không làm thế nữa và trao đổi với một chuyên gia giỏi về lý thuyết số. Và anh đã chọn cách thứ hai vì nếu cứ giữ bí mật mãi có thể công việc của anh không nhích lên được. Như chính anh đã nói, người ta có

thể dành cả cuộc đời để giải quyết một vấn đề nào đó mà không đạt được kết quả nào. Sự cần thiết phải trao đổi ý kiến với một người khác cuối cùng đã thắng yêu cầu gay gắt là phải giữ kín mọi điều để chỉ riêng mình biết. Nhưng giờ đây câu hỏi đặt ra là: Ai? Anh có thể tin cậy ai để giữ được bí mật của mình?

Vào tháng giêng năm 1993, sau sáu năm làm việc một mình, Wiles đã bắt đầu liên hệ với bên ngoài. Anh tìm đến giáo sư Nick Katz, một trong các đồng nghiệp của anh tại Khoa Toán Trường Đại học Tổng hợp Princeton. Katz là một chuyên gia về nhiều lý thuyết mà các lý thuyết này cần thiết cho việc chứng minh Công thức số lớp. Nhưng điều quan trọng hơn là Katz hoàn toàn đáng tin cậy. Anh ấy chẳng bao giờ tiết lộ điều gì mà Wiles không muốn. Đánh giá này của Wiles là hoàn toàn chính xác. Nick Katz đã giữ mồm giữ miệng trong suốt nhiều tháng trời cùng làm việc với Wiles. Các bạn đồng nghiệp của họ trong cộng đồng toán học đông đảo tại Princeton vẫn không thấy có gì khác thường, mặc dầu trong nhiều tuần họ trông thấy hai người nói chuyện riêng với nhau hàng giờ bên những ly cà phê ở tận cuối phòng công cộng.

Nhưng Andrew Wiles vẫn lo ngại rằng ai đó có thể tò mò về công việc anh đang làm. Để tránh điều đó, anh đã có kế hoạch để giấu sự thật rằng anh đang nghiên cứu "vấn đề gì đó" rất tâm đắc cùng với Nick Katz. Wiles tổ chức một chuyên đề toán học mới sau đại học vào dịp mùa xuân năm 1993 và Nick Katz đã tham dự chuyên đề này như một sinh viên. Nhờ vậy hai người có thể cùng nhau nghiên cứu mà không ai tò mò về điều họ đang làm. Chỉ ít thì đây cũng là điều mà Wiles đã nói ra. Các sinh viên không thể phỏng đoán được rằng đằng sau các bài giảng này là con đường dẫn đến Định lý cuối cùng của Fermat và Wiles, cùng với sự giúp đỡ của người bạn tuyệt vời Katz, có thể tranh thủ được trí tuệ của họ để lấp đầy những kẽ hở còn lại trong lý thuyết của anh.

Chuyên đề được thông báo với tên là "Các phép tính với các đường cong elliptic", một cái tên khá chung chung đủ để không một ai có thể nghi ngờ điều gì. Mở đầu bài giảng, giáo sư Wiles nói mục đích của chuyên đề nhằm nghiên cứu một số công trình gần đây của Matthias Flach về Công thức số lớp. Không đề cập gì tới Fermat, không đề cập gì tới Shimura hay Taniyama và không ai có thể nghi ngờ rằng Công thức số lớp mà họ sắp sửa nghiên cứu sẽ là yếu tố căn bản để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Cũng chẳng ai nghĩ rằng mục đích thực sự của các bài giảng không phải là dạy toán cho các sinh viên sau đại học, mà là để Wiles và Katz cùng nhau nghiên cứu bài toán này nhưng không bị bất kỳ đồng nghiệp nào của họ ngờ vực, đồng thời lại có thêm các nghiên cứu sinh kiểm tra công trình giúp họ mà không nghi ngờ gì cả.

Nhưng chỉ sau vài tuần, tất cả sinh viên biến đâu hết. Họ không thể tiếp tục khóa học vì nó thực sự chẳng đi đến đâu cả. "Sinh viên" và thính giả duy nhất còn lại là Nick Katz, người có lẽ nắm được tất cả mọi chuyện ở đây. Rồi Wiles tiếp tục dùng bảng của "lớp học" để ghi chứng minh dài dằng dặc của anh cho Công thức số lớp và cùng với Nick Katz kiểm tra từng bước một.

Các bài giảng không mắc phải sai sót nào. Gần như là chứng minh của *Công thức số lớp* sắp hoàn tất và Wiles đang trên đường dẫn tới lời giải bài toán Fermat. Vì vậy, vào cuối mùa xuân năm 1993, khi chuyên đề chuẩn bị kết thúc, Andrew Wiles gần như đã hoàn tất mọi việc. Anh chỉ còn phải vật lộn với một trở ngại cuối cùng. Wiles đã có thể chứng minh rằng hầu hết các đường cong elliptic là modula nhưng đối với một số ít còn lại vẫn chưa thể chứng minh được. Anh nghĩ rằng mình có thể vượt qua khó khăn này và rất lạc quan. Wiles cảm thấy đã đến lúc cần phải nói chuyện thêm với một người khác nữa để tìm hiểu sâu hơn những khó khăn cuối cùng mà anh đang phải đối mặt. Vì thế, anh đã trao đổi với một đồng nghiệp khác của mình tại Khoa Toán Trường Đại học Tổng hợp Princeton, giáo sư Peter Sarnak, và cũng yêu cầu ông ta phải giữ kín. "Tôi nghĩ rằng mình sắp chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat", anh nói và khiến cho Sarnak hết sức sửng sốt.

"Đó là điều không thể tin được", sau này Sarnak nhắc lại. "Tôi hết sức kinh ngạc, phấn khởi, bối rối. Tôi muốn nói... tôi nhớ, đêm hôm đó tôi rất khó ngủ". Vậy là giờ đây đã có hai bạn đồng nghiệp cố gắng giúp Wiles hoàn tất chứng minh của anh. Mặc dù chẳng ai biết được cụ thể các nhà toán học này đang làm nhưng người ta vẫn linh cảm thấy một điều gì đó. Mặc dù chính Sarnak khẳng định rằng không người nào biết được điều gì thông qua mình cả, nhưng sau này anh thừa nhận rằng đã vô tình thốt ra "có lẽ một chút bóng gió gì đấy...".

Khâu cuối cùng của bài toán

Vào một ngày của tháng 5 năm 1993, khi ấy Andrew Wiles đang ngồi một mình trong phòng làm việc với tâm trạng khó chịu. Hình như một số ít đường cong elliptic vốn đã lánh xa anh nay vẫn chẳng lại gần hơn chút nào. Anh vẫn chưa thể chứng minh được chúng là modula. Wiles cần chúng cũng phải là modula bởi nếu anh chứng minh được rằng tất cả các đường cong elliptic (bán ổn định) là modula thì Định lý cuối cùng của Fermat sẽ được suy ra từ đó. Làm được điều này đối với hầu hết các đường cong elliptic bán ổn định đã là một kết quả toán học lớn lao trong chính lý thuyết này, nhưng chưa đủ để anh đạt được mục đích của mình. Tạm ngừng công việc nghiên cứu căng thẳng mà chưa đi đến đâu để nghỉ ngơi chút ít, Wiles xem lại bài báo cũ của người thầy đáng kính Barry Mazur, Trường Đại học Harvard.

Mazur đã có những khám phá đặt nền móng cho lý thuyết số. Những kết quả của ông đã truyền cảm hứng cho nhiều chuyên gia trong lĩnh vực này, kể cả Ribet và Frey, những người mà công trình của họ đã mở đường cho cố gắng của Wiles. Bài báo của Mazur mà giờ đây Wiles đang đọc lại mở rộng lý thuyết các idêan được khởi đầu bởi Kummer và Dedekind, và còn được tiếp tục bởi một nhà toán học thứ ba của thế kỷ XIX - Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823- 1852). Mặc dù mất sớm, Eisenstein đã có những cống hiến rất quan trọng cho sự phát triển của lý thuyết số. Thậm chí, Gauss đã nói, như người ta trích dẫn: "Chỉ có ba nhà toán học của thời đại: Archimedes, Newton và Eisenstein".

Bài báo của Mazur về idêan Eisenstein có một dòng làm cho Wiles chú ý. Mazur nói rằng có thể chuyển từ một tập đường cong elliptic này đến một tập khác. Phép chuyển phải được thực hiện gắn liền với các số nguyên tố. Điều Mazur nói có nghĩa là nếu ta đang làm việc với các đường cong elliptic dựa trên số nguyên tố 3 thì có thể biến đổi chúng sao cho ta có thể nghiên cứu chúng bằng cách thay số 3 bằng số nguyên tố 5. Phép chuyển 3 thành 5 chính là điều mà Wiles cần. Anh bị bế tắc vì không thể chứng minh được rằng những lớp nhất định các đường cong elliptic dựa trên số nguyên tố 3 là modula. Và đến đây, Mazur nói rằng ông có thể chuyển chúng thành các đường cong dựa trên số nguyên tố 5, mà các đường cong dựa trên số 5 thì Wiles đã chứng minh được là modula. Như vậy, phép chuyển 3 thành 5 là thủ thuật cuối cùng. Điều này cho phép biến đổi các đường cong elliptic dựa trên số 3 rất khó nghiên cứu thành các đường cong dựa trên số 5 đã được biết là modula. Một lần nữa, ý tưởng tuyệt diệu của một nhà toán học khác lại giúp Wiles chiến thắng trở ngại tưởng như không thể vượt qua được. Andrew Wiles cuối cùng đã hoàn tất mọi việc.

Wiles cũng thu xếp thời gian của mình thật tuyệt vời. Vào tháng sau, tức là tháng Sáu, thầy hướng dẫn cũ của anh là John Coates sẽ chủ trì một hội nghị về lý thuyết số ở Cambridge. Tất cả các nhà toán học có tên tuổi trong lĩnh vực lý thuyết số sẽ có mặt ở đó. Cambridge vốn là thành phố quê hương anh và là nơi anh đã học chương trình sau đại học. Phải chăng đây sẽ là nơi lý tưởng nhất để anh trình bày chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat? Lúc này Wiles phải chạy đua với thời gian. Anh cần sắp xếp lại tất cả những việc đã làm được để chứng minh rằng giả thuyết Shimura-Taniyama đúng đối với các đường cong elliptic bán ổn định. Điều này có nghĩa là đường cong Frey không tồn tại. Và nếu đường cong Frey không tồn tại thì có nghĩa là không tồn tại nghiệm của phương trình Fermat với $n > 2$ và do đó Định lý cuối cùng của Fermat được chứng minh. Bài viết đầy đủ của Andrew Wiles dài 200 trang. Anh đã hoàn tất nó đúng lúc để kịp bay sang nước Anh. Khi bài thuyết trình cuối cùng của anh ở đó kết thúc, anh trở nên nổi bật bởi kỳ tích của mình trước những tràng pháo tay vang dội, những ống kính camera bùng sáng và đông đảo các phóng viên.

Công việc tiếp theo

Bây giờ là lúc tổng duyệt lại toàn bộ chứng minh. Thông thường, một kết quả toán học hay bất kỳ một phát minh khoa học nào muốn được công nhận thì phải được gửi đăng ở một tạp chí có uy tín. Các nhà khoa học thường công bố công trình của mình ở những tạp chí chuẩn mực như thế. Các tạp chí này có trách nhiệm gửi bài báo đến những chuyên gia thuộc lĩnh vực phù hợp để họ xem xét nội dung của bài báo, xác định xem kết quả nghiên cứu có đúng không và bài báo có đáng được công bố hay không. Những công trình khoa học được đăng trên các tạp chí có uy tín có thể ví như bánh mì và bơ của giới khoa học. Quyền lợi và sự thăng tiến, hay thông thường, bậc lương và việc tăng lương của mỗi nhà khoa học hoàn toàn phụ thuộc vào các bài báo được công bố trên các tạp chí danh tiếng.

Nhưng Andrew đã chọn một phương pháp khác. Thay cho việc gửi chứng minh của mình đến một tạp chí toán học chuyên ngành nào đó như hầu hết các nhà khoa học thường làm, anh trình bày nó tại một hội nghị. Có thể có hai lý do. Suốt những năm dài đi tìm chứng minh, Wiles đã luôn luôn phải giữ bí mật. Nếu anh gửi đăng chứng minh trên một tạp chí nào đó thì trước tiên bài viết của anh sẽ được gửi tới các phản biện do tạp chí lựa chọn và một trong số những người này hoặc các biên tập viên có thể tiết lộ bí mật ra cả thế giới. Cũng có thể Wiles lo ngại rằng nếu ai đó biết được chứng minh của anh thì họ có thể đánh cắp bằng cách này hay cách khác rồi gửi đăng thành công trình của họ. Thật đáng tiếc điều này đã từng xảy ra trong khoa học. Lý do thứ hai là Wiles muốn làm cho thính giả thêm hồi hộp khi theo dõi anh trình bày chứng minh của mình tại Cambridge.

Mặc dù các kết quả đã được trình bày tại hội nghị, công trình sẽ vẫn phải được gửi đi xin ý kiến phản biện. Những bước của chứng minh sẽ vẫn phải được xem xét lại thật kỹ lưỡng, tức là, các chuyên gia lý thuyết số sẽ phải kiểm tra lại chứng minh của Wiles, từng dòng một, để khẳng định rằng anh đã thực sự đạt được điều mà anh muốn chứng minh.

Một kẻ hờ lớn được phát hiện

Bài báo 200 trang của Wiles được gửi cho nhiều chuyên gia hàng đầu về lý thuyết số. Ngay lập tức, một số chuyên gia rất quan tâm và nhìn chung các nhà toán học cho rằng phép chứng minh có thể đúng. Tuy nhiên, họ vẫn còn phải chờ lời phán quyết của các nhà chuyên môn. "Ồ, tin chứ!", Ken Ribet trả lời khi tôi hỏi xem anh có tin chứng minh của Wiles không.

"Tôi không biết rồi các chuyên gia sẽ nói sao ngay sau khi họ đọc xong chứng minh vì ở đây không thấy sử dụng Hệ thống Euler".

Một trong số các chuyên gia được chọn để làm phản biện cho chứng minh của Wiles là Nick Katz, người bạn của anh ở Princeton. Giáo sư Nick Katz giành trọn hai tháng, tháng 7 và tháng 8 năm 1993, không làm gì hết ngoài việc nghiên cứu toàn bộ chứng minh. Hàng ngày, Katz như dính vào bàn làm việc của mình và cẩn trọng đọc từng dòng, từng ký hiệu toán học, từng phép suy diễn logic để bảo đảm rằng chứng minh là hoàn hảo và chấp nhận được đối với bất cứ nhà toán học nào nếu họ đọc chứng minh đó. Hàng ngày, Katz gửi thư điện tử một hoặc hai lần cho Andrew Wiles (vì anh đang ở xa Princeton vào mùa hè đó) và hỏi: "Anh muốn nói gì ở dòng này trên trang này?" hay là "Tôi không hiểu bằng cách nào phép suy diễn này lại được suy ra từ phép suy diễn nêu ở phần trên", v.v... Wiles trả lời lại bằng thư điện tử và nếu vấn đề nào đòi hỏi phải giải thích chi tiết hơn thì anh gửi fax câu trả lời cho Katz.

Một hôm, khi đã duyệt xong khoảng hai phần ba bản thảo dài lê thê của Wiles, Katz thấy có vấn đề. Những câu trả lời trước đây của Wiles đã làm cho Katz hoàn toàn thỏa mãn nhưng lần này thì không. Để trả lời câu hỏi của Katz, Wiles đã gửi đi một bức thư điện tử nhưng Katz đã phản hồi ngay: "Tôi vẫn không hiểu, Andrew ạ". Vì vậy, lần này Wiles phải gửi fax để làm rõ một mối liên hệ logic. Katz vẫn không thỏa mãn. Đơn giản là có điều gì đấy không ổn. Đây có thể là một trong các chi tiết mà mặc dù Wiles và Katz đã xem xét kỹ lưỡng hồi mùa xuân khi Wiles giảng "chuyên đề". Họ đã cố gắng khắc phục mọi khó khăn nhưng kẻ hở này trong chứng minh của Wiles đã qua mặt cả hai người. Nếu như các nghiên cứu sinh khác mà tiếp tục khóa học ấy thì biết đâu một nghiên cứu sinh nào đó đã có thể góp phần giúp hai người phát hiện ra kẻ hở.

Khi mà Katz phát hiện ra sự nhầm lẫn thì các nhà toán học khác trên thế giới cũng nhận ra chính vấn đề không ổn đó trong chứng minh của Wiles. Đơn giản là ở khâu này không thấy sử dụng Hệ thống Euler và vì thế không làm được gì. Không có Hệ thống Euler, cái được xem như một tổng quát hóa công trình của Flach và Kolyvagin, thì không có Công thức số lớp. Không có Công thức số lớp thì không thể "đếm" các biểu diễn Galois của các đường cong elliptic để so sánh với các dạng modula và giả thuyết Shimura-Taniyama không được chứng minh. Một khi giả thuyết Shimura-Taniyama mà chưa được chứng minh là đúng thì chưa có chứng minh cho Định lý cuối cùng của Fermat. Nói một cách ngắn gọn, sự thiếu vắng Hệ thống Euler làm cho mọi điều sụp đổ giống như một ngôi nhà giấy.

Nỗi đau khổ

Andrew Wiles trở lại Princeton vào mùa thu năm 1993. Anh bối rối, bực mình, cáu giận, thất vọng và buồn bã. Wiles đã hứa hẹn với cả thế giới rằng sẽ chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat nhưng anh chưa hoàn tất được. Trong toán học cũng như trong hầu hết các lĩnh vực khác, thực chất là không thể có giải thưởng "loại hai" hoặc "khuyến khích". Wiles chán nản quay về căn gác xép của mình và cố gắng hoàn tất chứng minh. "Lúc này, anh ấy đang giấu cả thế giới một điều bí mật", Nick Katz nhớ lại, "và tôi nghĩ rằng anh ấy cảm thấy khá bực bội về điều đó". Các đồng nghiệp cố giúp Wiles, kể cả người sinh viên cũ của anh là Richard Taylor đang giảng dạy tại Cambridge cũng đến Princeton để cố giúp anh hoàn tất chứng minh.

"Bảy năm đầu làm việc một mình, tôi luôn hào hứng với từng phút một", Wiles nhớ lại, "tôi đã đối mặt mà không hề ngần ngại chút nào với một vấn đề khó khăn đến mức tưởng như vô vọng. Nhưng giờ đây làm toán theo cái cách phô bày hết cả ra thế này chắc chắn không phải là phong cách của tôi. Tôi sẽ không bao giờ để cho tình huống này lặp lại một lần nào nữa". Và cái kinh nghiệm cay đắng cứ dằng dai bám lấy anh mãi. Hết kỳ nghỉ phép, Richard Taylor đã quay về Cambridge vậy mà Wiles vẫn chưa nhìn thấy đoạn kết ở đâu. Đồng nghiệp nhìn anh với ánh mắt động viên, hy vọng, xen lẫn sự thông cảm và mọi người xung quanh đều thấu hiểu nỗi đau khổ của anh. Họ muốn biết. Họ muốn nghe được những tin tức tốt lành nhưng không một đồng nghiệp nào dám hỏi anh đang hoàn tất chứng minh đến đâu rồi. Ngoài Khoa Toán của anh, cả thế giới cũng đang hồi hộp đợi chờ. Vào buổi tối ngày 4 tháng 12 năm 1993, Andrew Wiles gửi một bức thư điện tử đến nhóm tin tức máy tính Sci.math, một tổ chức mà nhiều nhà lý thuyết số và các nhà toán học khác tham gia. Nội dung bức thư như sau:

Xét hiện trạng việc nghiên cứu của tôi về giả thuyết "Shimura-Taniyama" và Định lý cuối cùng của Fermat, tôi muốn thông báo tóm tắt tình hình. Trong quá trình duyệt lại chứng minh, có nhiều vấn đề nảy sinh và hầu hết đã được giải quyết, song còn một trường hợp riêng tôi vẫn chưa giải quyết được... Tôi tin rằng mình có thể hoàn tất việc này trong một ngày gần đây bằng cách sử dụng những ý tưởng đã được giải thích trong các bài thuyết trình của tôi tại Cambridge. Vì vẫn còn nhiều việc phải làm đối với bản thảo nên nó chưa thể được đưa ra công bố. Trong chuyên đề tại Princeton bắt đầu vào tháng 2 tôi sẽ trình bày đầy đủ về công trình này. Andrew Wiles

Việc diễn ra sau đó

Nhưng Andrew Wiles đã lạc quan quá sớm. Cuối cùng rồi thì chuyên đề mà anh dự kiến trình bày tại Princeton cũng chưa đưa ra được giải pháp nào mới. Sau hơn một năm trôi qua kể từ thắng lợi ngắn ngủi tại Cambridge, Andrew Wiles gần như sắp từ bỏ mọi hy vọng và muốn quên đi chứng minh còn khiếm khuyết của mình.

Buổi sáng thứ Hai, ngày 19 tháng 9 năm 1994, Wiles đang ngồi ở bàn làm việc của mình tại Trường Đại học Tổng hợp Princeton với những chồng tài liệu bày la liệt xung quanh. Anh quyết định sẽ xem lại phép chứng minh của mình lần cuối cùng trước khi xếp nó lại và từ bỏ mọi hy vọng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Wiles cần phải tìm cho ra điều gì đã ngăn cản anh xây dựng Hệ thống Euler. Anh muốn biết, dù chỉ để thỏa mãn sự tò mò của cá nhân mình, tại sao anh đã thất bại. Tại sao lại không có Hệ thống Euler ở đó? Anh muốn xác định chính xác chi tiết kỹ thuật nào đã làm cho toàn bộ vấn đề đổ bể. Anh thấy rằng dù phải từ bỏ chứng minh của mình thì chí ít anh cũng phải có được câu trả lời là tại sao mình đã sai.

Wiles nghiên cứu các bài báo nằm trước mặt mình, tập trung cố gắng cao độ khoảng chừng hai mươi phút. Và chính lúc đó anh đã thấy được chính xác vì sao mình lại không thể hoàn tất được công việc. Cuối cùng anh đã hiểu được mình sai ở khâu nào. "Đó là thời điểm quan trọng nhất trong toàn bộ cuộc đời nghiên cứu của tôi", sau này anh kể lại cảm giác của mình. "Đột nhiên, hoàn toàn bất ngờ đến mức khó tin, tôi đã có được khám phá tuyệt vời. Không có điều gì mà tôi làm sẽ... ". Chính lúc đó những giọt nước mắt đã trào ra và Wiles nghẹt thở vì xúc động. Điều Wiles phát hiện ra được vào cái thời điểm định mệnh ấy là "tuyệt diệu không sao tả nổi, thật đơn giản làm sao và cũng thanh tao làm sao... đến nỗi tôi bắt đầu chuyển sang không tin". Wiles đã phát hiện ra rằng điều làm cho Hệ thống Euler không dùng được trong chứng minh lại chính là điều làm cho phương pháp Lý thuyết hoàn chỉnh Iwasawa mà anh đã bỏ bằng đi 3 năm trước đây lại áp dụng được. Wiles nhìn chằm chằm vào bài báo của mình một lúc lâu. Chắc chắn là mình đang mơ, anh nghĩ vậy. Điều này tuyệt diệu đến mức khó tin là đúng. Sau đó anh nói rằng điều đó tuyệt vời một cách giản đơn như vậy thì rất có thể nó *sai*. Nhưng một phát hiện quan trọng và tuyệt vời đến thế thì nó *cần* phải đúng.

Wiles đi đi lại lại trong phòng suốt mấy giờ. Anh không rõ mình tỉnh hay mơ. Chốc chốc anh trở lại bàn làm việc của mình để xem xem điều phát hiện kỳ diệu của anh có còn ở đó không - nó vẫn còn đó. Anh về nhà và đi ngủ trong tâm trạng đầy suy tư về điều vừa khám phá. Biết đâu sáng mai anh lại phát hiện ra một lỗi nào đó trong bước lập luận mới này. Một năm chịu sức ép từ cả thế giới, một năm mà hết cố gắng này đến cố gắng khác đều thất bại đã

làm lung lay niềm tin của Wiles. Anh trở lại bàn làm việc của mình tại trường vào buổi sáng hôm sau và cái viên ngọc kỳ lạ mà anh vừa tìm thấy hôm qua vẫn còn nằm đó, nó đang đợi chờ anh.

Wiles đã viết ra một cách chi tiết chứng minh của mình có sử dụng phương pháp Lý thuyết hoành Iwasawa. Cuối cùng, mọi thứ đã được đặt vào đúng chỗ. Cách tiếp cận mà anh đã sử dụng 3 năm trước đây là đúng. Anh nhận ra được điều này vì thấy rằng con đường của Flach và Kolyvagin mà anh đã chọn là không phù hợp. Bản thảo đã sẵn sàng để gửi đi. Trong tâm trạng rất phấn chấn, Andrew Wiles ngồi vào bàn máy tính và gửi thông điệp điện tử qua mạng internet đến nhiều nhà toán học trên khắp thế giới: "Hãy đợi bưu phẩm phát chuyển nhanh trong vài ngày tới".

Như đã hứa với bạn mình là Richard Taylor, người đã từ Anh sang để giúp anh sửa chữa chứng minh, bài báo mới với phần hiệu đính Lý thuyết Iwasawa đã mang tên cả hai người, mặc dù Wiles đạt được kết quả thực sự này sau khi Taylor đã về nước. Trong mấy tuần sau đó, các nhà toán học đã nhận được bài hiệu đính của Wiles cho các báo cáo mà anh đã trình bày ở Cambridge và họ đã duyệt kỹ tất cả các chi tiết. Không ai tìm thấy một lỗi lầm nào nữa. Lần này, theo cách thông lệ, Wiles gửi công trình đã được hoàn tất của mình đi công bố. Thay vì như đã làm tại Cambridge một năm rưỡi trước, anh gửi bài báo đến tạp chí toán học chuyên ngành, *Annals of Mathematics*, nơi mà các bài báo có thể được nhiều nhà toán học xem xét kỹ càng. Quá trình đánh giá kéo dài vài tháng và lần này người ta không tìm thấy một sai sót nào. Số tạp chí Tháng 5 năm 1995 đăng nguyên văn báo cáo của Wiles đã trình bày tại Cambridge cùng với bài hiệu đính của Taylor và Wiles [\[24\]](#). Đến đây, Định lý cuối cùng của Fermat đã hoàn toàn được chứng minh.

Có đúng là Fermat đã chứng minh được?

Andrew Wiles mô tả chứng minh của mình như là "phép chứng minh của thế kỷ XX". Quả vậy, Wiles đã sử dụng các công trình của nhiều nhà toán học thế kỷ XX. Anh cũng sử dụng kết quả của các nhà toán học tiền bối. Tất cả những yếu tố cơ bản trong công trình của Wiles đều bắt nguồn từ kết quả của những người khác, rất nhiều người khác. Vì vậy, chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat thực sự là thành tựu của đông đảo các nhà toán học thế kỷ XX và của cả những nhà toán học trước cho đến thời đại của Fermat. Theo Wiles, Fermat không thể có chứng minh trong đầu khi ông viết lời ghi chú nổi tiếng bên lề trang sách. Nhận định này của Wiles rất có thể là đúng vì giả thuyết Shimura-Taniyama không tồn tại cho đến tận thế kỷ XX. Nhưng liệu Fermat có thể có một cách chứng minh khác không?

Câu trả lời có lẽ là không. Nhưng điều này không hoàn toàn chắc chắn. Chẳng bao giờ chúng ta biết được. Mặt khác, Fermat đã sống 28 năm nữa kể từ khi ông viết định lý của mình lên lề trang sách, song không khi nào ông nói thêm điều gì về định lý đó nữa. Có thể ông biết rằng mình không thể chứng minh được định lý này; hoặc có thể ông đã lầm khi cho rằng phương pháp giảm vô hạn mà mình sử dụng trong chứng minh cho trường hợp đơn giản với $n=3$ có thể áp dụng cho trường hợp tổng quát; hoặc đơn giản là ông đã quên định lý này và chuyển sang làm việc khác.



Từ trái sang phải : Các nhà toán học John Coates, Andrew Wiles, Ken Ribet, Karl Rubin chúc mừng chứng minh của Wiles tại Cambridge sau bài thuyết trình lịch sử.

Cuối cùng, việc chứng minh định lý này đã được hoàn tất vào thập niên 1990 và nó đòi hỏi nhiều kiến thức toán học hơn hẳn những điều mà Fermat có thể biết. Bản chất sâu xa của định lý này không chỉ là ở chỗ nó có cả một quá trình lịch sử xuyên suốt chiều dài của nền văn minh nhân loại, mà lời giải cuối cùng của bài toán có được là nhờ áp dụng và hợp nhất tất cả các lĩnh vực của toán học. Chính sự hợp nhất các lĩnh vực toán học có vẻ như tách rời nhau cuối cùng đã chinh phục được định lý này. Và mặc dù Andrew Wiles là người đã thực hiện công đoạn quan trọng cuối cùng đối với định lý này bằng việc chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama, yếu tố cần thiết để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng toàn bộ chứng minh này có công lao của nhiều người. Và chính tất cả các đóng góp ấy cộng lại đã dẫn đến lời giải cuối cùng. Không có công trình của Ernst Kummer sẽ không có lý thuyết các idêan, và không có các idêan thì không thể có công trình của Barry Mazur. Không có Mazur thì sẽ không có giả thuyết Frey và không có giả thuyết quan trọng này cùng với đóng góp của Serre thì sẽ không có chứng minh của Ribet rằng từ giả thuyết Shimura-Taniyama sẽ suy ra Định lý cuối cùng của Fermat. Và có lẽ không thể có chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat nếu như không có giả thuyết do Yutaka Taniyama đề xướng vào năm 1955 tại Hội nghị Tôkyô-Nikko, mà sau đó được Goro Shimura chi tiết hóa và hoàn thiện. Hay là vẫn có thể chứng minh không theo quy trình trên?

Tất nhiên, Fermat không thể nêu lên được một giả thuyết uyên bác đến mức có thể hợp nhất hai ngành toán học rất khác nhau. Hay là ông đã làm được điều đó? Chẳng có gì là chắc chắn cả. Chúng ta chỉ biết rằng cuối cùng định lý này đã được chứng minh và chứng minh đã được kiểm tra đi kiểm tra lại đến từng chi tiết nhỏ nhất bởi rất nhiều nhà toán học trên khắp thế giới. Nhưng chính vì chứng minh này rất phức tạp và hiện đại nên không có nghĩa là không thể tồn tại một chứng minh đơn giản hơn. Trên thực tế, trong một bài báo của mình, Ribet đã chỉ ra một hướng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat mà có thể không cần chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama. Và cũng có thể Fermat đã biết nhiều về toán học "hiện đại", một công cụ đầy hiệu lực, mà giờ đây kết quả nghiên cứu của ông đã bị thất lạc (thực tế người ta chưa bao giờ tìm thấy cuốn Diophantus của Bachet mà trên lề trang sách Fermat đã viết ra khẳng định toán học nổi tiếng của mình). Vì vậy, liệu Fermat có được một "chứng minh tuyệt diệu" cho định lý của mình hay không, chứng minh mà không thể ghi hết ra trên lề trang sách, điều này sẽ mãi mãi là một bí mật của ông.



Gerd Faltings, người có cách tiếp cận hoàn toàn khác với Định lý cuối cùng của Fermat. Vào năm 1993, khi Andrew Wiles thất bại vì chưa tìm được lời giải hoàn chỉnh cho bài toán, nhiều người đã ngại rằng đó là lúc Faltings có thể tìm được lời giải đúng để vượt lên Andrew Wiles.



Andrew Wiles vào thời điểm quan trọng nhất của buổi thuyết trình thứ ba tại Cambridge (tháng 6/1993), khi mà tất cả mọi người đều nhận thấy rõ là lời giải bài toán Fermat đã trong tầm tay.



Ken Ribet tại quán cà phê nổi tiếng, nơi ông đã hoàn thành chứng minh rằng từ giả thuyết Shimura-Taniyama có thể suy

ra Định lý cuối cùng của Fermat cần phải đúng.

CHÚ GIẢI

[1.](#) E.T. Bell, *Những người đàn ông làm toán*, New York: Simon và Schuster, 1937, trang 56.

[2.](#) Barry Mazur, "Lý thuyết số như một người chằm chọc", Tạp chí *American Mathematical Monthly*, Số 98, 1991, trang 593.

[3.](#) Vào năm 1934, Otto Neugebauer đã lưu ý giới khoa học về viên gạch Plimpton 322 và từ nó toán học ở Babylon đã phát triển lên trình độ cao hơn. Tài liệu bằng tiếng Anh về vấn đề này có thể tìm trong cuốn sách của ông có tên gọi "*Khoa học chính xác thời cổ đại*", NXB ĐHTH Princeton, 1957.

[4.](#) Thực tế, Cantor còn đi xa hơn nữa. Ông giả thiết rằng bậc vô hạn của các số vô tỷ kế tiếp bậc vô hạn của các số hữu tỷ. Nghĩa là ông cho rằng không tồn tại bậc vô hạn nào vừa cao hơn bậc vô hạn của các số hữu tỷ lại vừa thấp hơn bậc vô hạn của các số vô tỷ. Khẳng định này được biết đến với tên gọi là Giả thuyết Continuum và công trình nghiên cứu của Kurt Godel và Paul Cohen trong thế kỷ thứ XX đã chỉ ra rằng người ta không thể chứng minh được giả thuyết này trong phạm vi còn lại của toán học. Giả thuyết Continuum đứng riêng một mình (cùng với một vài cách phát hiểu lại tương đương), đối lập với toàn bộ những gì còn lại thuộc về toán học và tính đúng đắn lẫn tương ứng của chúng hoàn toàn độc lập với nhau. Đây là một trong những chân lý kỳ dị nhất trong nền tảng của toán học.

[5.](#) D. Wells, *Những con số gây tò mò và đầy lý thú*, London: Penguin Books, 1987, trang 81.

[6.](#) C. Boyer, *Lịch sử toán học*, New York: Wiley, 1968, trang 9.

[7.](#) Được in lại (tái XB) trong sách của B. Mazur.

[8.](#) Ian Stewart, *Các con số của tự nhiên*, New York: Basic Books, 1995, trang 140.

[9.](#) Michael Mahoney, *Sự nghiệp toán học của Pierre de Fermat*, in lần thứ 2, NXB ĐHTH Princeton, 1994, trang 4.

[10.](#) Harold M. Edwards, *Định lý cuối cùng của Fermat*, New York: Springer-Verlag, 1977, trang 61 -73.

[11.](#) Nhiều điều về hội bí mật này được biết đến một cách rộng rãi là nhờ cuốn sách của Paul R. Halmos, "Nicolas Bourbaki", *Scientific American*, số 196, tháng 5/1957, trang 88-97.

[12.](#) André Weil, *Tuyển tập các công trình*, Tập I-III, Paris: Springer-Verlag, 1979.

[13.](#) Phỏng theo "Định lý cuối cùng của Fermat và Số học hiện đại" của Kenneth A. Ribet và Brian Hayes, *American Scientist*, số 82, tháng 3-4/1994, trang 144-156.

[14.](#) Một tài liệu nhập môn rất hay về lĩnh vực này là cuốn sách của Joseph H. Silverman và John Tate, *Các điểm hữu tỷ trên đường cong elliptic*, New York: Springer-Verlag, 1992.

[15.](#) Phần lớn tư liệu về cuộc đời của Yutaka Taniyama được lấy từ cuốn sách của Goro Shimura "*Yutaka Taniyama và thời đại của ông: Suru tập về cuộc đời riêng*", Tạp chí của Hội Toán học London, Số 21, 1989, trang 184-196.

[16.](#) Được in lại trong tạp chí bằng tiếng Nhật *Sugaku*, tháng 5/1956, trang 227-231.

[17.](#) Như vậy Shimura đã thông báo với Serre giả thuyết của mình. Đây là lần đầu tiên ông nói về giả thuyết này với người khác và hoàn toàn tin rằng Serre sẽ công nhận mình là người đã khởi xướng ra nó.

[18.](#) André Weil, *Tuyển tập các công trình*, trích đoạn từ Tập III, trang 450.

[19.](#) André Weil, "Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen" (Về việc xác định các chuỗi Dirichlet bằng phương trình hàm), *Math. Annalen*, Số 168, 1967, trang 165-172 (tiếng Đức).

[20.](#) Bức thư của Weil gửi cho Lang cùng với nhiều chi tiết về trình tự các sự kiện mô tả ở đây, trong đó có các cuộc hội thoại và thư từ riêng, được in trong cuốn sách của Serge Lang "Một vài nét về lịch sử của Giả thuyết Shimura-Taniyama", *Notices of the American Mathematical Society*, tháng 11/1995, trang 1301-1307. Công lao của Lang là ở chỗ bài báo của ông và "Hồ sơ Taniyama-Shimura" đã được phổ biến trong giới toán học từ 10 năm nay và cuối cùng đã làm cho Goro Shimura được công nhận một cách hoàn toàn xứng đáng.

[21.](#) Jean-Pierre Serre, "Thư gửi ngài J.F. Mestre", được in lại trong cuốn *Những xu hướng hiện nay trong hình học đại số - số học*, Providence: Hội Toán học Mỹ, 1987, trang 263-268.

[22.](#) Barry Mazur, "Các đường cong modula và ideal Eisenstein", Paris, Pháp: The Mathematical Publications of I.H.E.S., số 47, 1977, trang 33-186.

[23.](#) Trích dẫn của Barry Mazur.

[24.](#) Bài báo đầu tiên và quan trọng hơn trong số 2 bài báo của Andrew Wiles, "Các đường cong elliptic modula và Định lý cuối cùng của Fermat", *Annals of Mathematics*, số 142, 1995, trang 443-551, bắt đầu với khẳng định ghi trên lề sách bằng tiếng La tinh của Fermat về định lý của mình: *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet. Pierre de Fermat.* Tạp chí này thậm chí đã được bán hết trước cả ngày xuất bản và lần đầu tiên nó được định giá là 14 đôla Mỹ/cuốn.

LỜI TÁC GIẢ

Trong khi chuẩn bị cuốn sách này, tôi đã trích dẫn nhiều tư liệu lịch sử từ các nguồn khác nhau. Tài liệu gốc và hoàn chỉnh nhất mà tôi thích thú là cuốn sách của E.T. Bell "Những người đàn ông làm toán" (dù rằng tôi không thích cái nhan đề có phân biệt giới tính như thế, hơn nữa nó thiếu chính xác vì có hai nhà toán học được nhắc đến trong sách là phụ nữ; cuốn sách được viết năm 1937). Rõ ràng là các nhà viết lịch sử toán học khác đã trích dẫn thông tin từ cuốn sách của Bell, vì vậy ở đây tôi không nêu tên của họ nữa. Tất cả các nguồn tư liệu quan trọng mà tôi đã sử dụng được đề cập ở phần chú giải. Ngoài ra, tôi đã tham khảo các bài báo rất có giá trị của Jacquelyn Savani, Trường Đại học Tổng hợp Princeton (Tuần san Princeton, 6/9/1993). Tôi cảm ơn bà đã gửi cho tôi băng ghi chương trình phát trên đài BBC nói về Định lý cuối cùng của Fermat.

Tôi xin cảm ơn C.J. Mozzochi đã cung cấp một số bức ảnh về các nhà toán học đã tham gia vào quá trình chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Tôi chân thành cảm ơn giáo sư Kenneth A. Ribet, Trường Đại học Tổng hợp California ở Berkeley, đã dành cho tôi những cuộc phỏng vấn bổ ích để thu được những thông tin rất quan trọng về công trình nghiên cứu của ông dẫn đến chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Tôi biết ơn sâu sắc giáo sư Goro Shimura của Trường Đại học Tổng hợp Princeton, người đã dành nhiều thời gian để giúp tôi có được các tư liệu rất quan trọng về công trình nghiên cứu của ông và về giả thuyết không thể thiếu được của ông đối với chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Tôi vô cùng cảm ơn giáo sư Gerd Faltings của Viện Max Planck tại Bonn và giáo sư Gerhard Frey của Trường Đại học Tổng hợp Essen, Đức, đã dành cho tôi những cuộc phỏng vấn đầy ấn tượng và những lời góp ý sâu sắc. Tôi cũng cảm ơn giáo sư Barry Mazur của Trường Đại học Tổng hợp Harvard đã giải thích cho tôi những khái niệm quan trọng trong Hình học số học. Nếu còn bất kỳ sai sót nào trong cuốn sách này thì hoàn toàn là do lỗi của tôi.

Tôi cảm ơn John Oakes, người xuất bản cuốn sách này, đã khích lệ và ủng hộ tôi. Tôi cũng cảm ơn Jill Ellyn Riley và Kathryn Belden của Nhà xuất bản "Bốn bức tường Tám cửa sổ". Và cuối cùng, tôi rất biết ơn vợ tôi, Debra.

Amir

D.

Aczel



Tiến sĩ Amir D. Aczel đã tốt nghiệp đại học ngành Toán và sau đó nhận bằng thạc sĩ khoa học tại Trường Đại học Tổng hợp California ở Berkeley. Hiện nay ông là phó giáo sư về Thống kê học tại

Trường Đại học Bentley ở thành phố Waltham thuộc bang Massachusetts. Ông viết bài cho nhiều tạp chí trong đó có Tạp chí Nhà Kinh tế Mỹ, Tạp chí Tính toán Thống kê và Tạp chí Dự báo. Ông là tác giả của nhiều cuốn sách.

HẾT